7ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Derivadas 2

1. Calcule $g'(x)$ onde $g(x)$ é igual a

   (a) $x^3 - x^2 + 37x - 52$ (b) $17x^{19} + 13\sqrt[3]{x}$ (c) $5 + 3x^{-2}$ (d) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ (e) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

   (f) $\dfrac{x + \sqrt[4]{x}}{x^2+3}$ (g) $5x + \dfrac{x}{x-1}$ (h) $x\text{sen}x$ (i) $\dfrac{\cos x}{x^2+1}$ (j) $\dfrac{x + \text{sen}x}{x - \cos x}$ (k) $\dfrac{x^2+1}{\text{sec}x}$

   (l) $(x^3 + \sqrt{x})\text{cosec}(x)$ (m) $x\text{cotg}(x)$ (n) $x^2 e^x$ (o) $\dfrac{x+1}{x\ln x}$ (p) $x^2 \ln x + 2e^x \cos x$

2. Seja $f(x) = x^2\text{sen}x + \cos x$. Calcule $f'(x)$, $f'(3a)$, $f'(0)$ e $f'(x^2)$.

3. Dadas f, g e h funções deriváveis. Verifique que

$$[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

   Agora calcule $F'(x)$ sendo $F(x)$ igual a

   (a) $x^2(\cos x)(1 + \ln x)$ (b) $(1 + \sqrt{x})e^x\text{tg}x$ (c) $e^x(\cos x)(\text{sen}x)$

4. Determine a derivada

   (a) $f(x) = cos(5x)$ (b) $x(t) = sen(t^3)$ (c) $g(t) = \ln(2t+1)$ (d) $x(t) = e^{sent}$ (e) $y(x) = (senx+cosx)^3$

   (f) $y(x) = sen(cosx)$ (g) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (h) $y(x) = e^{-x}senx$ (i) $g(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

   (j) $y(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (k) $y(x) = \sqrt{x^2 + e^{\sqrt{x}}}$ (l) $y(x) = \ln(secx + tgx)$ (m) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

   (n) $f(x) = (\sin(x) + 1)^{\ln(x)}$

5. **(*)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Prove

   (a) Se f for uma função ímpar, então f' será par.

   (b) Se f for uma função par, então f' será ímpar.

6. Seja $y = \dfrac{x^3}{x + \sqrt{x}}$. Calcule (a) $\dfrac{dy}{dx}$ e (b) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

7. Seja $y = t^2 x$, onde $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1}$ supondo $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=1} = 2$ e $x(1) = 3$.

8. Considere a função $y = \dfrac{t}{x+t}$, onde $t = t(x)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ sabendo que $\left.\dfrac{dt}{dx}\right|_{x=1} = 4$ e $t = 2$ para $x = 1$.

9. Seja $y = \dfrac{-2}{x^2 + k}$, k constante. Verifique que $\dfrac{dy}{dx} - xy^2 = 0$.

10. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $g(2) = 2$ e $g'(2) = 2$. Calcule $H'(2)$, sendo H dada por $H(x) = g(g(g(x)))$.

11. Calcule a derivada

    (a) $f(x) = 5^x + \log_3 x$ (b) $y = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (c) $g(x) = 3^{2x+1} + \log_2(x^2+1)$ (d) $y = x^{x^2+1}$

    (e) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ (f) $y = x^{x^x}$ (g) $y = (1+x)^{e^{-x}}$ (h) $y = (x^2+1)^\pi$

12. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que $g(1) = 2$ e $g'(1) = 3$. Calcule $f'(0)$, sendo f dada por $f(x) = e^x g(3x+1)$.

13. Seja $f(x) = x + e^x$ e seja g a função inversa de f. Mostre que $g'(x) = \dfrac{1}{1 + e^{g(x)}}$. Calcule $g'(1)$ e $g''(1)$.

14. Seja f uma função de domínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dada pela lei $f(x) = x + \sin(x)$.
Verifique que (definindo de maneira oportuna o contradomínio) f é invertível, e calcule a derivada de f^{-1} nos pontos 0, $\frac{\pi+2}{2}$ e $\frac{\pi+2\sqrt{2}}{4}$.

15. **(*)** Use o teorema da derivada da função inversa para determinar a derivada das funções arcsin, arccos, arctan, ln, SetSh, SetCh, SetTh, $\sqrt[n]{x}$.

16. Calcule a derivada segunda
(a) $e^{-x} - e^{-2x}$ (b) $e^{-x}cos2x$ (c) $\dfrac{sen(3x)}{e^x}$ (d) $\dfrac{4x+5}{x^2-1}$ (e) $xe^{\frac{1}{x}}$

17. Seja $y = y(r)$ derivável até a segunda ordem. Verifique que $\dfrac{d}{dr}\left(y^2\dfrac{dy}{dr}\right) = 2y\left(\dfrac{dy}{dr}\right)^2 + y^2\dfrac{d^2y}{dr^2}$.

18. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até segunda ordem e seja g dada por $g(x) = f(e^{2x})$. Verifique que

$$g''(x) = 4e^{2x}[f'(e^{2x}) + e^{2x}f''(e^{2x})]$$

19. Determine α de modo que $y = e^{\alpha x}$ verifique a equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$.

20. Derive
(a) $cotg(x^2)$ (b) $sec(tgx)$ (c) $cosec(2x)$ (d) $\ln(sec3x + tg3x)$
(e) $e^{-x}sec(x^2)$ (f) $(x^2 + cotgx^2)^3$

21. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e seja g dada por $g(x) = f(e^{2x})$. Suponha $f'(1) = 2$ e calcule $g'(0)$.

22. Determine f', f'' e f''' para (a) $f(x) = 5x^2 - \dfrac{1}{x^3}$ (b) $f(x) = x|x|$ (c) $f(x) = 4x^4 + 2x$

23. Calcule e esboce os gráficos de f, f' e de f'', onde $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \leq 1 \\ 5x - 1, & x > 1 \end{cases}$

24. Determine a derivada de ordem n de:
(a) $f(x) = \cos x$ (b) $f(x) = e^{-x}$ (c) $f(x) = \ln(x)$ (d) $f(x) = \cosh(x)$.

25. Calcule a derivada segunda de
(a) $x(t) = t\text{sen}t$ (b) $y(t) = t \ln t$ (c) $y(x) = x^{10} + \dfrac{1}{x^3}$ (d) $x(t) = e^t \cos t$

26. Seja $y = e^x cosx$. Verifique que $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

27. Determine a derivada de
(a) $x\text{arctg}(x)$ (b) $g(x) = \arccos(x^3)$ (c) $\cos(\text{arcsen}x)$ (d) $\dfrac{x\text{arctg}x}{\cos(2x)}$

28. Considere a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-3} & se\ x \leq 1\,, \\ L + Mx & se\ x > 1. \end{cases}$
(a) Encontre todos os valores L e M tais que f seja contínua.
(b) Encontre todos os valores L e M tais que f seja derivável em todo $x \in \mathbb{R}$.
(c) Calcule as funções f' e f'' com os valores de L, M encontrados ao ponto anterior.
(d) Esboce o gráfico de f

29. **(!)** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0, \\ x^\alpha + cx & x > 0 \end{cases}$,
a) Determine para quais valores dos parâmetros $\alpha, c \in \mathbb{R}$ a função f é contínua.
b) Determine para quais valores dos parâmetros $\alpha, c \in \mathbb{R}$ a função f é derivável, e então calcule a função

$f'(x)$.

c) Determine para quais valores dos parâmetros $\alpha, c \in \mathbb{R}$ a função f é duas vezes derivável, e então calcule a função $f''(x)$.

Gabarito

Exercício 3 c) $e^x(\cos(x)\sin(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x))$

Exercício 4 m) $\frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$, onde $x > e$!!!!!

Exercício 7 $y' = 8$

Exercício 8 $y' = -2/9$

Exercício 10: 8

Exercício 11 g) $(1+x)^{e^{-x}} e^{-x} \left(\frac{1}{x+1} - \ln(1+x)\right)$ (com $x \geq -1$).

Exercício 12 $f'(0) = 11$

Exercício 14: $1/2$, 1, $\frac{2}{\sqrt{2}+2}$

Exercício 19 $\alpha = 1$ ou 2

Exercício 13 $g'(1) = 1/2$, $g''(1) = -1/8$

Exercício 29: a) c qualquer, $\alpha > 0$; b) $[\alpha > 1,\ c = 0]$ ou $[\alpha = 1,\ c = -1]$; c) $\alpha = 2$ e $c = 0$.