Lista n.6

Cálculo da derivada pela definição:

1. Calcule $f'(p)$, pela definição, sendo dados
   (a) $f(x) = x^2 + x$ e $p = 1$ (b) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $p = 1$ (c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 2$

2. Calcule $f'(x)$ pela definição:
   (a) $f(x) = e^x$ (b) $f(x) = \frac{1}{x}$ (c) $f(x) = \sin(x)$ (d) $f(x) = 7$ (e) $f(x) = x$

Uso das regras de derivação:

3. Calcule $f'(x)$ sendo f dada por
   (a) $f(x) = x^{100}$ (b) $f(x) = \frac{1}{x^7}$ (c) $f(x) = x^{-3}$ (d) $f(x) = \sqrt[9]{x}$ (e) $f(x) = \sqrt[6]{x}$

4. Calcule $g'(x)$ onde $g(x)$ é igual a
   (a) $x^3 - x^2 + 37x - 52$ (b) $17x^{19} + 13\sqrt[3]{x}$ (c) $5 + 3x^{-2}$ (d) $\frac{4}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}}$ (e) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$
   (f) $\frac{x + \sqrt[4]{x}}{x^2 + 3}$ (g) $5x + \frac{x}{x-1}$ (h) $x\text{sen}x$ (i) $\frac{\cos x}{x^2+1}$ (j) $\frac{x + \text{sen}x}{x - \cos x}$ (k) $\frac{x+1}{x \ln x}$

5. Seja $f(x) = x^2\text{sen}x + \cos x$. Calcule $f'(x)$, $f'(3a)$, $f'(0)$ e $f'(x^2)$.

6. Dadas f, g e h funções deriváveis. Verifique que

$$[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

   Agora calcule $F'(x)$ sendo $F(x)$ igual a
   (a) $x^2(\cos x)(1 + \ln x)$ (b) $(1 + \sqrt{x})e^x\text{tg}x$ (c) $e^x(\cos x)(\text{sen}x)$

7. Determine a derivada
   (a) $f(x) = cos(5x)$ (b) $sen(t^3)$ (c) $g(t) = \ln(2t + 1)$ (d) e^{sent} (e) $(senx + cosx)^3$
   (f) $sen(cosx)$ (g) $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$ (h) $(\sin(x) + 1)^{\ln(x)}$ (i) $g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ (j) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

8. Calcule $f'(x)$ sendo
   (a) $f(x) = \pi^x$ (b) $f(x) = 7^x$ (c) $f(x) = \log_3 x$ (d) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$

9. Seja $g(x) = x^2 f(x)$, onde f é uma função derivável. Calcule $g'(1)$ supondo $f'(1) = 2$ e $f(1) = 3$.

10. Considere a função $g(x) = \frac{f(x)}{x + f(x)}$, onde f é uma função derivável. Calcule $g'(1)$ sabendo que $f'(1) = 4$ e $f(1) = 2$.

11. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(2) = 2$ e $g'(2) = 2$. Calcule $H'(2)$, sendo H dada por $H(x) = g(g(g(x)))$.

12. Calcule a derivada
   (a) $f(x) = 5^x + \log_3 x$ (b) $y = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (c) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (d) $y = x^{x^2+1}$

13. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $g(1) = 2$ e $g'(1) = 3$. Calcule $f'(0)$, sendo f dada por $f(x) = e^x g(3x + 1)$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e seja g dada por $g(x) = f(e^{2x})$. Suponha $f'(1) = 2$ e calcule $g'(0)$.

Problemas com reta tangente:

15. Determine a equação da reta tangente em $(p, f(p))$ sendo dados
    (a) $f(x) = x^2$ e $p = 2$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 2$ (c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 9$
    (d) $f(x) = x^2 - x$ e $p = 1$
    Esboce os gráficos, em cada caso acima, de f e da reta tangente.

16. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

17. Determine a equação da reta tangente a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos.

18. Determine a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e paralela à reta $y = 4x + 2$.

19. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto de abscissa 1, e no ponto de abscissa e. Esboce os gráficos.

20. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \mathrm{tg} x$ no ponto de abscissa 0, e no ponto de abscissa $\pi/4$. Esboce os gráficos.

Significado geométrico da derivada

21. Dê exemplo, por meio de um gráfico, de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que:
    (a) $f'(1) = 0$
    (b) $f'(x) > 0$ para todo x
    (c) $f'(0) < f'(1)$
    (d) $f'(x) > 0$ para $x < 1$ e $f'(x) < 0$ para $x < 1$
    (e) $f'(x) > 0$ para $x < 0$, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$ e $f'(x) > 0$ para $x > 2$
    (f) $f'(0) = f'(1) = 0$

22. Dê exemplo, por meio de um gráfico, de uma função f definida e contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1)$ não exista.

Gabarito

Exercício 6 c) $e^x(\cos(x)\sin(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x))$
Exercício 9 $f' = 8$
Exercício 10 $f' = -2/9$
Exercício 11: 8
Exercício 13 $f'(0) = 11$
Exercício 16 $y = 1 - 2(x-1)$
Exercício 17 $y = 1 + (x-1)/3$
Exercício 18: $y = 4x - 4$.
Exercício 19: $y = x - 1$ e $y = x/e$.
Exercício 20: $y = x$ e $y = 2x - \pi/2 + 1$.