6ª Lista de Exercícios de SMA-333- Cálculo 3

Eugenio Massa

1. Estendendo as funções abaixo de maneira que sejam 2π-periódicas, calcule a série de Fourier de cada uma delas :
   a) $f(x) = \sin(|x|)$ para $x \in [-\pi, \pi]$ b) $f(x) = x$ para $x \in (-\pi, \pi]$
   c) $f(x) = |x|$ para $x \in [-\pi, \pi]$ d) $f(x) = \sin(x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$
   e) $f(x) = x^2$ para $x \in [-\pi, \pi]$ f) $f(x) = \sin(x) + \cos(x) + 0.5\sin(3x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$
   g) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ 0 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$ h) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ 0 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$
   i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ x & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$ j) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ 1 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$

2. Para cada função do exercício anterior diga para onde convergem as séries de Fourier encontradas, nos pontos $x = -\pi,\ 0,\ \pi/2,\ \pi$. Sugestão: esboce o gráfico de cada uma e busque os pontos de descontinuidade, se eles existirem).

3. Escreva a série de Fourier da função 2π-periódica e ímpar, que em $[0, \pi)$ é dada pelas funções a seguir:
   a) $f(x) = 25$, b) $f(x) = \sin(x)$, c) $f(x) = x$, d) $f(x) = \cos(x)$.

4. Escreva a série de Fourier da função 2π-periódica e par, que em $[0, \pi]$ é dada pelas funções do exercício 3. Compare os resultados.

5. Verifique através da série de Fourier de $f(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi]$ que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

6. Utilize a série de Fourier do exercício anterior para encontrar a série de Fourier de
$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} & \text{para } x \in (0, \pi] \\ -\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} & \text{para } x \in (-\pi, 0] \end{cases}.$$

7. Resolva a equação do calor
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0,t) = 0 = u(\pi, t) & \text{para } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para } x \in (0, \pi) \end{cases}$$
   sendo $f(x)$ cada uma das funções do exercício 3 (use os resultados do exercício).

8. Resolva a equação do calor nos casos do exercício anterior, substituindo a condição de extremos a temperatura costante $u(0,t) = 0 = u(\pi, t)$, pela condição de extremos isolados $u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi, t)$ (use os resultados do exercício 4)

9. Para os problemas nos dois exercícios acima, para onde converge a solução quando $t \to \infty$? Compare os resultados.
   discuta a convergência uniforme de $u(x, 0)$, $u(x, 1)$ e $u_x(x, 1)$.

10. a) Calcule a solução estacionária (isto é, com $u_t = 0$) de:
$$\begin{cases} w_t = a^2 u_{xx} & \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty) \\ w(0,t) = -1, \quad w(\pi, t) = 1 & \text{para } t \in [0, \infty) \end{cases}.$$

b) Use o resultado em a) para encontrar a solução dos problemas de Cauchy abaixo: (sugestão: escreva $u = w + v$ e escreva o problema para v)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & \text{em } (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = -1, \quad u(\pi,t) = 1 & \text{para } t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = 1 & \text{para } x \in (0,\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & \text{em } (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = -1, \quad u(\pi,t) = 1 & \text{para } t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = 1 - x & \text{para } x \in (0,\pi) \end{cases}.$$

c) Nestes dois problemas, para onde a solução vai quando $t \to \infty$?