

5ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Limites infinitos e fundamentais

Exercício 1 (*) Para o M dado, calcule um $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ para todo x no domínio da função, tal que $0 < |x - p| < \delta$.

a) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$; $M = 100$; $p = -3$;

b) $f(x) = |\tan(x)|$; $M = 10$; $p = \pi/2$;

c) $f(x) = -\log_{10}(x)$; $M = 3$; $p = 0$;

Exercício 2 (*) Para o M dado, calcule um H tal que $f(x) > M$ para todo $x > H$.

a) $f(x) = x^3$; $M = 100$;

b) $f(x) = e^x$; $M = 1000$;

c) $f(x) = \log_{10}(x)$; $M = 4$;

Exercício 3 (*) Para o ε dado, calcule um $H > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x > H$.

a) $f(x) = \frac{x^2}{(x+3)^2}$; $L = 1$; $\varepsilon = 0.1$;

b) $f(x) = |\arctan(x)|$; $L = \pi/2$; $\varepsilon = 0.1$;

c) $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$; $L = 0$; $\varepsilon = 0.0001$;

Exercício 4 (*) Demonstre, utilizando a definição, que:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 1 = +\infty$ (b) $\lim_{x \rightarrow 10^-} \frac{x^2 - 1}{x - 10} = -\infty$ (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 100}{10 - x} = -3$

Exercício 5 Dê um exemplo de funções f e g tais que

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L, L \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = 0,$$

mas não existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exercício 6 Calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{6 \operatorname{sen} x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - 1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x - 2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{tg}(x - p)}{x^2 - p^2}, p \neq 0$

(h!) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p}{x - p}$

Exercício 7 Calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - 7x + 3}{4x^6 + x + 5}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4 + 1}{x^5 + 6x + 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{6x + 1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 6x - 1}}{\sqrt{3x^2 + 4x + 1}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 7}$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 2} - \sqrt{x + 5})$

Exercício 8

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{2x^3 + 4x - 1}$

(b) Mostre que existe $r > 0$ tal que

$$x > r \Rightarrow 0 < \frac{2x + 5}{2x^3 + 4x - 1} < \frac{1}{2}.$$

Exercício 9 Calcule:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{5+3x} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{x^2+3}) & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-2}) \\
 \text{(d)} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x^2+x} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+4}{x^2+x} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x-6}{x^2+4x-5} \\
 \text{(g)} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-9}{x^2-6x+9} & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{7x^2-5}{1-x^2} & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4-x^3}
 \end{array}$$

Exercício 10 Calcule:

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(x))}{e^x - 1} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^4} - 1}{x^2} & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{e^{\cos(x)-1} - 1} \\
 \text{(e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{\cos(x)}{1+\pi^2} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x^2}} & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}}
 \end{array}$$

Exercício 11 Encontre todas as assíntotas (horizontais, verticais ou oblíquas) das seguintes funções:

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \frac{x^2+x}{x-1} & \text{(b)} \frac{x^5+x^4+1}{2x^4+1} & \text{(c)} \frac{x^5+x^4+1}{x^3-1} & \text{(d)} \frac{2x+3}{x-2} \\
 \text{(e)} \sqrt[3]{2+8x^2} & \text{(f)} \sqrt[3]{2+8x^3} & \text{(g)} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} & \text{(h)} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{(i)} \sqrt[3]{2+4x^2+8x^3} \\
 \text{(j)} \sqrt[3]{x^3+\sqrt{x}x^2+8} & \text{(k)} \sqrt{2x^2+8x^3} & &
 \end{array}$$

GABARITO

- Exercício 1:** Poderia ser: (a) $\delta = 0.1$ (c) $\delta = 0.001$
- Exercício 2:** Poderia ser: (a) $H = 10$ (c) $H = 1000$
- Exercício 3:** Poderia ser: (a) $H = 30$ (c) $H = 4$
- Exercício 6:** (a) 2 (b) $\frac{7}{6}$ (c) -1 (d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) π (f) $\frac{1}{2}$ (g) $\frac{1}{2p}$ (h) 0 (i) $\cos(p)$ (j) $\sec^2(p)$
- Exercício 7:** (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (e) 0 (f) 0
- Exercício 9:** (a) $-\frac{1}{3}$ (b) $+\infty$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $+\infty$ (e) $+\infty$ (f) $-\infty$ (g) $+\infty$ (h) $+\infty$ (i) $-\infty$
- Exercício 10:** (a) 1 (b) 1 (c) 0 (d) $-2/3$ (e) 0 (f) e
- Exercício 11:** (a) AV $x = 1$, AO $y = x + 2$; (b) AO $y = (x + 1)/2$; (c) AV $x = 1$; (d) AV $x = 2$, AH $y = 2$;
 (e) não tem; (f) AO $y = 2x$; (g) AH $y = \pm 1$; (h) AV $x = 0$, AH $y = 1$; (i) AO $y = 2x + 1/3$; (j) nenhuma; (k) nenhuma;