

5ª Lista de Exercícios de SMA-333- Cálculo 3

Eugenio Massa

1. Componha uma série de potências cujo intervalo de convergência seja $(-11, 11)$ e uma cujo intervalo de convergência seja $(-2, 0)$.

2. Determine o conjunto de convergência das séries abaixo:

$$\begin{array}{llll}
 a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - \sqrt{2})^{(2n+1)}}{2^n} & b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x - 1)^{(2n+1)}}{n!} & c) \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n} \\
 d) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+3)^n & e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}} & f) \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} & g) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(1/n) & h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n+2}{n^2+1} x^n
 \end{array}$$

3. Para quais x as séries **do exercício anterior** convergem absolutamente? Para quais x as séries convergem condicionalmente? em que conjuntos convergem uniformemente?

4. Determine o **intervalo de convergência** da série e, dentro desse intervalo, a soma da série.

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{(2n)}}{9^n}; \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n.$$

5. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ uma série de potências dada. Prove que:

a) se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, então o raio de convergência R da série é zero.

b) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, então o raio de convergência R da série é infinito.

c) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \neq 0$, então o raio de convergência da série é $R = 1/L$.

6. Para qual função $f(x)$ converge a série abaixo, e em qual conjunto?

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+2}} \quad d) \sum_{n=2}^{\infty} x^n n!.$$

7. Suponha que a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-1)^k$ converge em $x = 3$. O que você pode dizer sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad b) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad c) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k 2^k$$

8. calcule o intervalo de convergência da série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, onde $a_{2n} = 1$ e $a_{2n+1} = 2$. Encontre também uma fórmula explícita para f .

9. Escreva uma série de potências para $\int_0^x f(t) dt$ e encontre seu raio de convergência.

$$a) f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \quad b) f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

10. Usando o **Teorema de diferenciação termo a termo** prove que a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ é uma solução da equação diferencial $f''(x) + f(x) = 0$.

11. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Encontre os intervalos de convergência para f , f' e f'' .

12. Represente em série de potências a função $f(x) = \ln(x+1)$, $x \in (-1, 1)$.

13. Represente em séries de potências a função $f(x) = x^2 e^{-x}$. Derivando termo a termo a série obtida, calcule a soma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}(n+2)}{n!}$. (Resp: 0).

14. Se $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t+3)^{2n}}{(2n)!}$, represente $\int_{-3}^x f(t) dt$ como uma série de potências e encontre o raio de convergência.
15. Represente as funções abaixo como soma de uma série de potências e determine o intervalo de convergência:
- a) $\frac{1}{x-7}$, b) $\frac{x}{4+x^2}$, c) $\frac{2}{x^2-4x+3}$, d) $\frac{1}{(1-x)^2}$, e) $\frac{x^3}{(1-x^4)^2}$, f) $\frac{1}{1+9x^2}$
g) $\frac{x}{1-x}$, h) $(1-x^2)\arctg(x)$, i) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$, l) $\frac{x}{1-x^3}$, m) $x^2 \ln(1+2x)$, n) $\frac{\cos(x)-1}{x^2}$,
o) $(1+x^2)\cos(x)$, p) $\arctg(x^2)$.
16. Calcule $f^{(3)}(0)$ para os pontos e,f,h,i,m,o,p do exercício anterior.
17. Mostre que $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ para $|x| < 1$. Calcule com esta série $\ln(3)$ até o terceiro decimal. Para obter a expressão acima pode integrar termo a termo a função $\frac{1}{1-t^2}$.
18. Use séries de potências para calcular as seguintes integrais
- a) $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+t^4} dt$ b) $\int_0^1 \arctg(t^2) dt$ c) $\int_0^1 t^2 \arctg(t^4) dt$ d) $\int_0^{1/2} \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) dt$.
19. Calcule, até o terceiro decimal, as expressões abaixo:
- a) $\int_0^{1/2} e^{-t^3} dt$ b) $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ c) $\int_0^1 \cos(\sqrt{t}) dt$
20. Encontre o domínio da função (de Bessel) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ e verifique que ela satisfaz a equação $x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x) = 0$.
21. Use séries de potências para resolver os seguintes problemas de Cauchy. (Calcule também o raio de convergência da série).
- a) $y'' + xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, b) $y'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
22. Calcule a série de Taylor de centro $p = 0$ e o intervalo de convergência das seguintes funções (quando puder, use séries conhecidas):
- a) $\sin(x)$, b) $\cos(x)$, c) e^x , d) e^{-x} , e) $\ln(1+x)$, f) $\sin(x)\cos(2x)$, g) $\cos^2(x)$.
23. Calcule a série de Taylor de centro p e o intervalo de convergência, para as seguintes funções (quando puder, use séries conhecidas):
- a) e^x , $p = 1$ b) $\sin(x)$, $p = \pi$ c) $\frac{1}{x}$, $p = 1$
24. Encontre $g^{(15)}(0)$ e $g^{(18)}(0)$ da função $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.
Encontre $f^{(3)}(0)$ e $f^{(4)}(0)$ da função $f(x) = (1+x^2)\sin(x)$; escreva a série numérica que fornece $f^{(3)}(1)$ e $f^{(4)}(1)$.
25. Considere a função $f(x) = \begin{cases} e^{(-\frac{1}{x^2})} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$:
- a) Quantas vezes é derivável?
b) Esboce o gráfico.
c) Calcule sua série de Taylor de centro 0:
d) a série converge? converge a f ?
26. Calcule o valor de $\ln(1,2)$ com quatro casas decimais de precisão expandindo $f(x) = \ln(1+x)$ em série de Taylor em torno de $a = 0$.
27. Verifique a analiticidade das funções a seguir, usando o teorema estudado:
- a) $\sin(x)$, b) e^x , c) $\ln(x)$ em 1, d) x^2 , d) $\arctg(x)$ em 0.