

**5ª Lista de Exercícios de SMA380 - Análise**

*Ana Peron & Eugenio Massa*

**Sequências de funções**

1. Determine o conjunto de convergência pontual e a função limite pontual das seguintes sequências de funções.

- |                                    |                                     |   |
|------------------------------------|-------------------------------------|---|
| (a) $f_n(x) = e^{nx}$ ,            | (g) $f_n(x) = x^n$ ,                | (m) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n+x}$ ,     |
| (b) $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$ , | (h) $f_n(x) = \frac{1}{nx^2}$       | (n) $f_n(x) = nx$ ,                       |
| (c) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ ,  | (i) $f_n(x) = \sin(nx)$ ,           | (o) $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ |
| (d) $f_n(x) = \arctan(x+n)$ ,      | (j) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ , | (p) $f_n(x) = x^n(1-x^n)$                 |
| (e) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ ,         | (k) $f_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n}$ |   |
| (f) $f_n(x) = \sum_{j=1}^n x^j$ ,  | (l) $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ,        |   |

$$(q) f_n(x) = \begin{cases} n(1-n|x|) & |x| \leq 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases} \quad (s) f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1/n \\ n & x < 1/n \end{cases}$$

$$(r) f_n(x) = \begin{cases} 1-n|x| & |x| \leq 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases}$$

2. Verifique se as sequências do exercício anterior convergem uniformemente no seu conjunto de convergência pontual. Em caso contrário encontre um oportuno conjunto onde tenha-se convergência uniforme.
3. Sejam  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\{a_n\}$  uma sequência de números reais convergindo a  $a \in \mathbb{R}$ . Considere

$$f_n : A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f_n(x) = a_n g(x).$$

Determine o conjunto de convergência pontual e a função limite de  $\{f_n\}$ . Examine a convergência uniforme.

4. Sejam  $f_n : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas no fecho de  $A$ ,  $\bar{A}$ . Se a sequência  $\{f_n\}$  converge uniformemente em  $A$ , então  $\{f_n\}$  converge (uniformemente) em  $\bar{A}$ .
5. Seja  $\{f_n : A \rightarrow \mathbb{R}\}$  uma sequência de funções tal que  $f_n \rightarrow f$  pontualmente em  $A$ . Se  $f_n$  e  $f$  são integráveis em  $[a, b] \subset A$  e  $\{f_n\}$  é **uniformemente limitada** em  $[a, b]$ , isto é,

$$\exists k > 0; |f_n(x)| \leq k, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b],$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

6. Sejam  $\{f_n : A \rightarrow \mathbb{R}\}$  e  $\{g_n : A \rightarrow \mathbb{R}\}$  sequências de funções tais que  $f_n \xrightarrow{p} f$  e  $g_n \xrightarrow{p} g$  em  $A$ . Prove que

- (a)  $f_n + g_n \xrightarrow{p} f + g$  em  $A$ ;
- (b)  $f_n g_n \xrightarrow{p} f g$  em  $A$ ;
- (c)  $\frac{1}{f_n} \xrightarrow{p} \frac{1}{f}$  em  $A$ , desde que  $f_n(x) \neq 0, \forall x \in A$ , definitivamente, e  $f(x) \neq 0, \forall x \in A$ .

7. Sejam  $\{f_n : A \rightarrow \mathbb{R}\}$  e  $\{g_n : A \rightarrow \mathbb{R}\}$  seqüências de funções tais que  $f_n \xrightarrow{u} f$  e  $g_n \xrightarrow{u} g$  em  $A$ . Prove que
- (a)  $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g$  em  $A$ ;
  - (b) se  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$  são uniformemente limitadas em  $A$ , então  $f_n g_n \xrightarrow{u} f g$  em  $A$ ;
  - (c) se existe  $c > 0$  tal que  $|f_n(x)| \geq c$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in A$ , então  $\frac{1}{f_n} \xrightarrow{u} \frac{1}{f}$  em  $A$ ;
  - (d) dê exemplos que mostrem que as conclusões em (b) e (c) podem não valer sem as hipóteses adicionais.

**Nos exercícios abaixo, se ajude com algum programa para visualizar os gráficos, mas procure justificar tudo analiticamente.**

8. Para cada  $n \geq 1$ , seja  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$ . Considere a função dada por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

- a) Esboce os gráficos de  $f$  e de  $f_n$ .
- b)  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  em  $[0, 1]$ ? Justifique.
- c) Verifique que

$$\int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

9. Verifique que a seqüência  $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$  converge pontualmente mas não uniformemente em  $\mathbb{R}$ . Mostre que a convergência é uniforme em oportunas semi-retas.
10. Seja  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nxe^{-nx^2}$ .
- a) Calcule  $\int_0^1 f(x) dx$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx$
  - b) Mostre que a seqüência  $f_n$ , onde  $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ , não converge uniformemente a  $f$  em  $[0, 1]$ .
11. Mostre que  $f_n(x) = \frac{\sin(n^\alpha x)}{n^2}$  converge uniformemente a zero em  $\mathbb{R}$ . Calcule para quais  $\alpha \in \mathbb{R}$  as seqüências  $f'_n$  e  $f''_n$  também convergem uniformemente a zero.
12. Seja  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x+n}$  e  $a > 0$ . Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f_n(x) dx = 0$$