4^a Lista de Exercícios de SMA380 - Análise

Ana Peron & Eugenio Massa & William Corrêa

Derivada

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f \cap D_f'^{+}$. A *derivada à direita* de f em p é dada pelo limite (caso exista):

$$f'_+(p) = \lim_{t \to p^+} \frac{f(t) - f(p)}{t - p}.$$

1. Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ derivável à direita no ponto $p \in D_f \cap D_{f'_+}$. Prove que, se $f'_+(p) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in D_f$ e

   $$p < x < p + \delta,$$

   então

   $$f(p) < f(x).$$

   Enuncie resultado análogo para derivada à esquerda.

   Observação. Este resultado não diz que f é crescente num intervalo à direita de p, pois apenas os valores de $f(p)$ e $f(x)$ (para cada x) estão sendo comparados.

2. Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ derivável em $p \in D_f \cap D_{f'_+} \cap D_{f'_-}$. Prove que, se f é derivável em p e $f'(p) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in D_f$ e

   $$p - \delta < x < p < y < p + \delta,$$

   então

   $$f(x) < f(p) < f(y).$$

   Enuncie o resultado correspondente para $f'(p) < 0$.

   Observação. Mais uma vez, este resultado não diz que f é crescente num intervalo contendo p.

3. (*) Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ derivável em $p \in D_f \cap D_{f'_+} \cap D_{f'_-}$. Prove que, se f é derivável em p e possui máximo ou mínimo local em p, então

   $$f'(p) = 0.$$

   Lembrando: f possui máximo (mínimo) local em p se existe $\delta > 0$ tal que

   $$f(x) \leq f(p) \quad \text{(respectivamente } f(x) \geq f(p)\text{)}$$

   para todo $x \in D_f \cap (p - \delta, p + \delta)$.

4. Prove que a função $f : [0, \infty) \to [0, \infty) : x \mapsto \sqrt{x}$ é uniformemente contínua.

   Observação. Este é um exemplo de função uniformemente contínua que não é Lipschitz.

5. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I e diferenciável no interior de I, tal que f' é limitada no interior de I. Mostre que f é Lipschitziana.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$
Prove que f é constante.

7. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciável.
   (a) Prove que se $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f é estritamente crescente.
   (b) Prove que $f((a, b))$ é um intervalo aberto.
   (c) Prove que a função inversa a f, $g : f((a, b)) \to (a, b)$, é contínua.
   (d) Prove que se $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$, então a inversa g é diferenciável e vale
$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{para todo } x \in (a, b).$$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f'(x)$ existe para todo $x \neq 0$. Além disso, suponha que exista $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$. Então, necessariamente existe $f'(0)$?

9. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tais que
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$
Mostre que se $p \in X \cap X'$ é tal que $f(p) = h(p)$, f e h são diferenciáveis em p e
$$f'(p) = h'(p),$$
então g é diferenciável em p e $g'(p) = f'(p) = h'(p)$.

10. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
   (a) Prove que f é derivável.
   (b) Encontre sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergindo a 0, com $x_n \neq 0 \neq y_n$ para todo n, tais que o limite
$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$
   não exista.

11. **(*) Teorema de Darboux, Valor Intermediário para derivada:** Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável e $\gamma \in \mathbb{R}$ entre $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \gamma$. Em particular f' assume todos os valores entre $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$.

Dica: use o Exercício 1.

12. Prove que, se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em I, então f' não tem descontinuidades de primeira espécie em I (veja Ex. 9, Lista 3).

13. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) com $f(a) = f(b) = 0$. Prove que, para todo $k \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = kf(c).$$

Dica: Use o Teorema de Rolle para a função $g(x) = f(x)e^{-kx}$.

Polinômio de Taylor

14. Engenheiros freqüentemente usam a aproximação $\text{sen} x \approx x$ para valores pequenos de x. Explique por que.

15. Qual função afim ($f(x) = ax + b$) é uma boa aproximação para a função $\sqrt{x}$ em uma vizinhança de 1?

16. Suponha que f seja derivável em x_0 e seja

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a função afim que aproxima $f(x)$ para x próximo de x_0. Mostre que o erro nesta aproximação se aproxima de 0 quando $x \to x_0$, isto é,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - L(x)] = 0.$$

17. Calcule o polinômio de Taylor de ordem n (qualquer) em $p = 0$ das seguintes funções:

(a) $\sin(x)$
(b) $\cos(x)$
(c) e^x
(d) e^{-x}
(e) $\cosh(x)$
(f) $\sinh(x)$
(g) $\ln(1 + x)$
(h) $1/(1 + x)$.

18. Use o computador para desenhar os gráficos das funções do exercício anterior junto com seus polinômios de Taylor de ordem 2,4,6,10 e 16. Comente.

19. Calcule o polinômio de Taylor em $p = 0$ da ordem indicada, para as seguintes funções:

(a) $\sin(x^2)$, ordem 8
(b) $\sin^2(x)$, ordem 6
(c) $\sin(x)\cosh(x)$, ordem 6

20. Ache o polinômio de Taylor de ordem n no ponto a para as seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $a = 1$; $n = 3$.
(b) $f(x) = e^{-x}$; $a = 0$; $n = 4$.
(c) $f(x) = x^{3/2}$; $a = 4$; $n = 3$.
(d) $f(x) = \text{sen} x$; $a = \dfrac{\pi}{6}$; $n = 3$.
(e) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$; $n = 4$.

21. Use uma oportuna aproximação linear para calcular $(5,103)^2$ e compare com seu valor real 26.040609.

22. Use uma oportuna aproximação linear para calcular $\dfrac{1}{9,78}$ e compare com o valor 0.10224949 obtido com uma calculadora.

23. **(!)** Calcule o valor de $\ln(1,2)$ com quatro casas decimais de precisão expandindo $f(x) = \ln(1+x)$ como polinômio de Taylor em torno de $a = 0$.

24. Aplique a fórmula de Taylor para expressar o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ como um polinômio em potências de $(x-1)$.

25. **(*)** Queremos aproximar o valor de $\cos(1)$ e de $\sin(1)$ através de seus polinômios de Taylor calculados em 0. Qual será a ordem do polinômio necessário para o erro ser menor de 10^{-k}?

26. Calcule os seguintes limites usando oportunos polinômios de Taylor (se possível e necessário):

$$(a)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^\alpha} \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + \cos(3x) - 2 + \sin^2(x)}{x\sin(x)} \qquad (c)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos\frac{1}{x} + \cosh(\frac{1}{x}) - 2}{x^\alpha}$$

27. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una função 3 vezes derivável em 0 com $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = \pi$.
a) Calcular o polinômio de Taylor de ordem 3 (em 0) da função $g(x) = e^x f(x)$.
b) Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - f(x)}{f(x^2)} \,.$$

28. **(!)** Seja f uma função 3 vezes derivável: calcular $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)-2hf'(a)}{h^3}$

29. **(!)** Num programa pode ser computada a derivada de uma função 3 vezes derivável, através das seguintes fórmulas:

a) $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{2h}$; b) $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$; c) $\frac{2f(a+h)-f(a-h)-f(a)}{3h}$.
- Use o polinômio de Taylor em a para verificar se é verdade que as três aproximam $f'(a)$ (quer dizer, o limite para $h \to 0$ é $f'(a)$) e para determinar qual delas é a melhor (quer dizer, o erro cometido diminui mais rapidamente quando $h \to 0$).
- Dê uma aproximação do erro cometido em termos das derivadas de ordem superior a 1 da f em a.
- Proponha uma fórmula que aproxime $f''(a)$.

30. **(*!)** Considere a função $f(x) = \begin{cases} e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, :
a) Quantas vezes é derivável?
b) Esboce o gráfico.

c) Calcule seu polinômio de Taylor T_0^n, de ordem n em 0:
d) Encontre (se for possível) n tal que $|f(1) - T_0^n(1)| < 0.1$

Integral de Riemann

Nesta seção deve-se resolver os exercícios usando a definição e as propriedades de integral de Riemann dadas no Slide 4.

31. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função constante dada por $f(x) = c$. Verifique que f é integrável em $[a, b]$ e que $\displaystyle\int_a^b f = c(b - a)$.

32. Sejam $a < c < b$, $\alpha \leq \beta$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & a \leq x < c \\ \beta, & c \leq x \leq b. \end{cases}$$

Prove que

$$\int_a^b f = \alpha(c - a) + \beta(b - c).$$

Mais geralmente: sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função e

$$\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n : \ a = x_0 < x_1 < .. < x_{n-1} < x_n = b\} ;$$

uma partição de $[a, b]$. Se f é constante igual a c_i em cada subintervalo (x_{i-1}, x_i) (*função tipo escada*), então f é integrável em $[a, b]$ e que

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_{i-1} - x_i).$$

Note que: o valor da integral é independente dos valores que f assume nos pontos da partição $\mathcal{P}$.

33. Prove que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável, e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\{x \in [a, b] : \ f(x) \neq g(x)\}$$

contém um número finito de pontos, então g é integrável e

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

.

34. Prove que se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são limitadas e integráveis, então:

   a) $f \geq 0$ em $[a,b]$ implica $\int_a^b f \geq 0\,;$
   b) $f = 0$ em $[a,b]$ implica $\int_a^b f = 0\,,$
   c) $\alpha f + \beta g$ é integrável e $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_a^b f\right) + \beta \left(\int_a^b g\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
   d) $f \geq g$ em $[a,b]$ implica $\int_a^b f \geq \int_a^b g\,;$
   e) $|f|$ é integrável e $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,;$
   f) fg é integrável.

35. Prove que se $f \geq 0$ é contínua em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f = 0$, então $f = 0$ em $[a,b]$.

36. A função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida abaixo é integrável em $[-1,1]$.

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

37. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \quad \text{(irredutível, } p \neq 0\text{).} \end{cases}$$

   Prove que:

   (a) f é não é contínua em um número infinito de pontos;
   (b) f é integrável em $[a,b]$.

   Este exemplo contradiz o Teorema Di.4.7?