

Lista n.4

Exercício 1 Seja f uma função definida em \mathbb{R} e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \leq M|x - p|$ para todo x . Prove que f é contínua em p .

Exercício 2 Supondo que $|f(x) - f(1)| \leq (x - 1)^2$ para todo x . Mostre que f é contínua em $x = 1$.

Exercício 3 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $\forall x \neq 1$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e justifique.

Exercício 4 Suponha que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|g(x)| \leq x^4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.

Exercício 5 (*) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $[g(x)]^4 + [f(x)]^4 = 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calcule e justifique:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^5 g(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \sqrt{x^3 - 27}$.

Exercício 6 (*) Mostre e verifique graficamente que

(a) Não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$. (b) Existe $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Exercício 7 (*) Seja $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Calcule (se possível) e justifique os resultados:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x \sin(x))$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x \sin(\frac{1}{x}))$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(\lfloor |x| \rfloor)$.

Comente os resultados.

Exercício 8 Dê um exemplo de uma função f de maneira que $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)|$ exista, mas $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não exista.

Exercício 9 Calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{6 \operatorname{sen} x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ (d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - 1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x - 2}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (g) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{tg}(x - p)}{x^2 - p^2}, p \neq 0$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi e^x)}{e^x}$ (j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) \cos(e^x)}{\cos(\ln(x+2)) \tan(\ln(x))}$

NOTA: Os exercícios marcados com (*) serão feitos na sala de aula, estão na lista para que depois vocês refaçam sozinhos.

GABARITO

Exercício 3 2 **Exercício 4** 0 **Exercício 5** (a) 0 (b) 0 **Exercício 7** a) 1; b) $\bar{\mathbb{R}}$; c) 3

Exercício 9: (a) 2 (b) $\frac{7}{6}$ (c) -1 (d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) π (f) $\frac{1}{2}$ (g) $\frac{1}{2p}$ (h) 1 (i) 0 (j) $\cos(e)/\cos(\ln(3))$