3ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Limites 1

Exercício 1 (*)Para o ε dado, calcule um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x tal que $0 < |x - p| < \delta$.
a) $f(x) = x + 3$; $L = 5$; $p = 2$; $\varepsilon = 0.01$;
b) $f(x) = -3x + 1$; $L = -2$; $p = 1$; $\varepsilon = 0.01$;
c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $L = -1$; $p = 0$; $\varepsilon = 1$;

Exercício 2 (*!)Demonstre, utilizando a definição, que:

(a) $\lim\limits_{x\to 4} x^2 = 16$ **(b)** $\lim\limits_{x\to -1}(11x + 5) = -6$ **(c)** $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} 8\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^2 - 100}{x - 10} = 20$

(e) $\lim\limits_{x\to 1/4} \sqrt{x} = 1/2$ **(f)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

Exercício 3 (*) Prove que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to p} |f(x)| = 0$.

Exercício 4 (*) Prove que

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \iff \lim_{x\to p}(f(x) - L) = 0 \iff \lim_{x\to p} |f(x) - L| = 0$$

(sugestão: escreva as três definições e compare!).

Exercício 5 *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$ *então é CERTAMENTE verdade que:*
a) $\forall\, k > 0$, *vale* $|f(3) - 5| < k$
b) $\forall\, k > 0$, *vale que* $0 < |x - 3| < 1$ *implica* $|f(x) - 5| < k$
c) $\exists\, h > 0$ *tal que* $0 < |x - 3| \le h$ *implica* $4 < f(x) < 6$
d) $\forall\, k > 0$, $\exists\, h > 0$ *tal que* $|x - 3| \le h$ *implica* $5 - k < f(x) < 5 + k$

Exercício 6 Dê o valor, caso exista, que a função deveria assumir no ponto dado para ser contínua:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ em $p = 4$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x}$ em $p = 0$ **(c)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ em $p = 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 81}{x - 9}, & x \neq 9 \\ 10, & x = 9 \end{cases}$ em $p = 9$ **(e)** $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$ em $p = 1$

(f) $f(x) = \dfrac{|x - 5|}{x - 5}$ em $p = 5$ **(g)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$ em $p = 25$

Exercício 7 Dê um exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$, de maneira que seja contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$ exceto nos inteiros.

Exercício 8 Calcule o limite, se existir:

(a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x + 2}{x^2 - x - 6}$ **(b)** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h - 5)^2 - 25}{h}$ **(c)** $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$

Exercício 9 Calcule os limites abaixo, justificando cada passagem:

(a) $\lim\limits_{x\to 17} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{17}}{x - 17}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{5 + x} - 3}{\sqrt{5 - x} - 1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5}}$

Exercício 10 Determine L para que a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{11}}{\sqrt{x + 11} - \sqrt{22}}, & x \neq 11 \\ L & x = 11 \end{cases}$

seja contínua em $p = 11$.

Exercício 11 A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, & x \neq -1 \\ 2 & x = -1 \end{cases}$ é contínua em $p = -1$? E em $p = 0$? Justifique.

Exercício 12 Determine os valores x nos quais a função dada é contínua, e os nos quais é descontínua:

$(a)\, f(x) = x^2(x+3)^2$ $\qquad (b)\, g(x) = \dfrac{x}{x-3}$ $\qquad (c)\, h(x) = \dfrac{x^3+7}{x^2-4}$

$(d)\, f(x) = \begin{cases} 3x-1 & se\ x < 2 \\ 4-x^2 & se\ x \geq 2 \end{cases}$ $\qquad (e)\, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & se\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & se\ x > 1 \end{cases}$ $\qquad (f)\, h(x) = \dfrac{|x+4|}{x+4}$

$(g)\, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-3} & se\ x \neq 3 \\ 0 & se\ x = 3 \end{cases}$ $\qquad (h)\, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & se\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & se\ x > 1 \end{cases}$ $\qquad (i)\, h(x) = \sqrt{x^2-x-2}$

Exercício 13 Encontrar (se for possível) L e M de forma que a função dada seja contínua:

$(a)\, f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x < 0 \\ L & se\ x = 0 \\ 1+Mx & se\ x > 0 \end{cases}$ $\qquad (b)\, g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & se\ x < 1 \\ L & se\ x = 1 \\ x-2 & se\ x > 1 \end{cases}$

$(c)\, f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x > 1 \\ Lx+M & se\ x \in [0,1] \\ \frac{x^2-2x}{-3x^2} & se\ x < 0 \end{cases}$ $\qquad (d)\, g(x) = \begin{cases} L(x+1)^2 & se\ x \leq 0 \\ \sin(x)+M & se\ x \in (0,\pi] \\ \cos(x) & se\ x > \pi \end{cases}$

Exercício 14 **(*)** Calcule $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ em cada um dos casos:

(a) $f(x) = x^2+13$ **(b)** $f(x) = 4x+5$ **(c)** $f(x) = 5$

Exercício 15 **(*)** Calcule $\displaystyle\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ em cada um dos casos:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Exercício 16 Seja f uma função contínua no ponto 3, e $f(3) = 10$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$,

$$3-\delta < x < 3+\delta \Rightarrow f(x) > 9.$$

Exercício 17 Se f é contínua em 1 e $f(1) = 4$. Justifique a afirmação que existe $r > 0$ tal que para todo $x \in D_f$,

$$1-r < x < 1+r \Rightarrow \frac{7}{2} < f(x) < \frac{9}{2}.$$

Exercício 18 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x)-f(p)| \leq M|x-p|$ para todo x. Prove que f é contínua em p.

Exercício 19 Supondo que $|f(x)-f(1)| \leq (x-1)^2$ para todo x. Mostre que f é contínua em $x = 1$.

Exercício 20 **(!)** Suponha que

$$\lim_{x\to p} f(x) = L\,.$$

a) Quais são os possíveis resultados para $\lim_{x\to p}[[f(x)-L]]$? (aqui $[[y]]$ é a parte inteira de y)
b) Para cada um dos possíveis resultados, encontre um exemplo e uma hipótese sobre f que garanta dito resultado.

Exercício 21 Prove que $\displaystyle\lim_{x\to p} f(x) = L \iff \lim_{h\to 0} f(p+h) = L$.

Exercício 22 (*!) Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções definidas em um intervalo aberto I e $a \in I$. Verifique se as afirmações abaixo são **verdadeiras** ou **falsas**, justificando as respostas (isto é, exibindo uma demonstração nos casos verdadeiros e dando um contra-exemplo nos casos falsos).

a) Se existirem os limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$ então existirá o limite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

b) Pode existir o limite $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ sem que existam os limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

c) Se existir o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e não existir o limite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ então não existe o limite $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$.

d) Se existirem os limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ então existirá o limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

e) Se existir o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e não existir o limite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ então não existirá o limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

f) Se existirem os limites $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ então existirá o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Gabarito

Exercício 1 Poderia ser: **(a)** $\delta = 0.01$ **(b)** $\delta = 0.001$ **(c)** $\delta = 0.1$

Exercício 6 **(a)** 8 **(b)** -1 **(c)** não existe **(d)** 18 **(e)** 1 **(f)** não existe

Exercício 8 **(b)** -10 **(c)** 6

Exercício 9 **(a)** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{289}}$ **(b)** $-\dfrac{1}{3}$

Exercício 10 $\sqrt{2}$.

Exercício 11 f é contínua em $p = 0$, mas não é contínua em $p = -1$.

Exercício 12: *b)* contínua em $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, *g)* contínua em $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, descontínua em 3, *h)* contínua em $\mathbb{R}$.

Exercício 13: *a)* $L = 1$, *b)* $\nexists L$.

Exercício 14 **(a)** $2x$ **(b)** 4

Exercício 15 **(a)** $-\dfrac{1}{p^2}$ **(b)** $-\dfrac{2}{p^3}$

Exercício 20 a) 0, -1 ou $\nexists$