

3ª Lista de Exercícios de SMA-333- Cálculo 3

Eugenio Massa

- Componha uma série infinita cuja soma seja 5.
- Use o **Teste da integral** para determinar se cada série converge ou diverge.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n + 1}$$

- Determine se a série converge ou diverge, justificando a resposta.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} 6n^{-1,01} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt[n]{n}} \right) \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^\pi} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \arctan n}{n^{1.001}}$$

$$e) 3 + \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{3}{4\sqrt{4}} + \dots \quad f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^p} : \quad \alpha, p \in \mathbb{R}$$

Sugestão: para o ponto (f), considere a parte o caso $\alpha = 1$.

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, o que podemos dizer sobre a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n)$? Justifique.
- Prove que se $\sum a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, então $\sum a_n^2$ converge.
- Use o **Teste de Leibnitz** para determinar se a série converge ou diverge.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

- Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas; se for falsa forneça um contraexemplo.
 - toda série alternada é condicionalmente convergente.
 - toda série absolutamente convergente é convergente.
 - toda série convergente é absolutamente convergente.
 - toda série alternada converge.
 - se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem então $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n$ diverge para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente.

- Estime o número de termos que precisa somar para aproximar as seguintes séries com erro menor do ε dado.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(25/n), \quad \varepsilon = 10^{-2} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{10^n}, \quad \varepsilon = 10^{-10} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}, \quad \varepsilon = 10^{-2}$$

- Quais das séries convergem **absolutamente**, quais convergem **condicionalmente**, quais divergem e quais são oscilantes?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin n}{n!} \right)$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{(2n)^n} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + n} - n)$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.01)^n}{n} \quad i) \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n+1} \frac{1}{n+5^n}$$

$$l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(\frac{n\pi}{6} \right)}{n^3 \sqrt{n}}$$

10. Quais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas recursivamente como abaixo convergem e quais divergem? **Justifique.**

a) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{11n^3 + 5n^2 + 1}{2n + 9n^3} a_n$

b) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{\pi + \arctan n}{2n^2} a_n$

11. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma séries condicionalmente convergente e

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0, \end{cases} \quad c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ a_n & \text{se } a_n < 0. \end{cases}$$

Prove que ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergem.

12. Determine se a série converge ou diverge, justificando a resposta.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \ln n)^2}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \ln n}{n^3}$	c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cos(n\pi)$	d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{2}{n^2}\right)$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n}$	f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}$	g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\sqrt{n}}$	h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^3}$
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n^{\frac{3}{2}}}$	l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$	m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5 - \sin(n)}\right)^n$	n) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3 - \sin(n)}\right)^n$
o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{n}$	p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$	q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/2)}{n}$	r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/n)}{n}$
o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$	p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$	q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/15)}{n}$	r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$

13. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1 + x^2)^{n-1}}$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

14. Prove que $\forall x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1 + x^n)^2}$$

converge.

15. Mostre que a integral imprópria $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge, aplicando o critério de Leibnitz à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

16. Usando o **critério de Cauchy**, demonstre que se série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

17. Diga (justificando) quando é possível definir a soma dos elementos dos conjuntos a seguir; no caso, calcule esta soma.

a) $\{n : n \in \mathbb{N}\}$ b) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ c) $\{1/[n(n+1)] : n \in \mathbb{N}\}$

d) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$ e) $\{1/n^2 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1/n^2 : n \in \mathbb{N}\}$