4^a Lista de Exercícios de SMA380 - Análise

Ana Peron & William Corrêa

Limites

1. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que
$$\exists\, M > 0;\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \forall x, y \in D_f. \tag{I}$$
Mostre que, para todo $p \in {D_f}'$, tem-se
$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Observação. Uma função que satisfaz (I) é chamada *função de Lipschitz*, com constante de Lipschitz M.

2. Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in D'$ tais que
$$\lim_{x \to p} g(x) = 0, \quad g(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in D \setminus \{p\}.$$
Demonstre que, se existe
$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$
então existe $\lim_{x \to p} f(x)$ e esse limite é necessariamente igual a zero.

3. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in {D_f^+}'$. Demonstre que
$$\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty$$
se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de D_f com $x_n > p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se
$$f(x_n) \to +\infty.$$

4. Sejam $p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{R} \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \frac{1}{(x - p)^n}.$$
Demonstre (usando a definição de limite) que:

   (a) se n é par, então
   $$\lim_{x \to p} \frac{1}{(x - p)^n} = +\infty;$$

   (b) se n é ímpar, então
   $$\lim_{x \to p^+} \frac{1}{(x - p)^n} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p^-} \frac{1}{(x - p)^n} = -\infty;$$

(c) qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-p)^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-p)^n} = 0.$$

5. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x+2, & x < 2 \\ -(x-2)^2+4, & 2 \leq x \leq 4 \\ -2, & x > 4. \end{cases}$$

Calcule os limites abaixo, caso existam, de dois modos (use os teoremas de limites):
• encontrando a lei da função $g \circ f$ • sem encontrar a lei de $g \circ f$

(a) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} g(f(x))$ (b) $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ (c) $\lim_{x\to 2} g(f(x))$

Resp.: (5a) $\frac{9}{4}$; (5b) $\nexists$: $\lim_{x\to 0^+} g(f(x)) = 2$ e $\lim_{x\to 0^-} g(f(x)) = 4$; (5c) $\nexists$: $\lim_{x\to 2^+} g(f(x)) = -2$ e $\lim_{x\to 2^-} g(f(x)) = 0$

Continuidade

1. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para algum ponto $p \in {D_f}' \setminus D_f$, existe o limite

$$L = \lim_{x\to p} f(x).$$

Prove que f pode ser estendida a uma função

$$F : D_f \cup \{p\} \to \mathbb{R}$$

que é contínua em a.

2. Demonstre que $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$, existe um aberto $B \subset \mathbb{R}$ tal que

$$f^{-1}(A) = D_f \cap B.$$

Lembre-se que $f^{-1}(A) := \{x \in D_f : f(x) \in A\}$ representa a imagem inversa do conjunto A por f.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função invertível com inversa $g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que, se g for uma função contínua, então, para cada aberto $A \subset \mathbb{R}$, a imagem direta $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ do conjunto A por f é um conjunto aberto.

Sugestão. Use a conclusão do exercício anterior.

4. Demonstre que $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$, existe um fechado $G \subset \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(F) = D_f \cap G$.

5. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que, para todo $E \subset D_f$, tem-se $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

6. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Prove que:

   (a) o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$ é um conjunto aberto;

   (b) o conjunto $F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ é um conjunto fechado.

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente que é descontínua em um ponto $c \in (a, b)$. Prove que existe um $\gamma \in \mathbb{R}$, com $f(a) < \gamma < f(b)$, que não pertence à imagem de f.

8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a)f(b) < 0$. Demonstre que existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

9. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f possui uma *descontinuidade de primeira espécie* em

$$p \in D_f \cap D_f^{+\prime} \cap D_f^{-\prime}$$

   se f é descontínua em p e existem os limites laterais

$$\lim_{x \to p^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p^-} f(x).$$

   Dizemos que f possui uma *descontinuidade de segunda espécie* em $p \in D_f$ se $p \in D_f^{+\prime}$ (ou $p \in D_f^{-\prime}$) e não existe

$$\lim_{x \to p^+} f(x) \quad \left(\text{ou } \lim_{x \to p^-} f(x)\right).$$

   (a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   Que tipo de descontinuidade f tem em 0? Justifique.

   (b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   Que tipo de descontinuidade g tem em 0? É possível alterar o valor de $g(0)$ de forma que essa descontinuidade mude de tipo? Justifique.

10. **(*)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e $\{a_n\}$ uma sequência em X. Prove que se toda subsequência convergente de $\{x_n\}$ convergir para L, então $\{x_n\}$ converge a L.

11. Mostre que, se $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função monótona, então nenhuma de suas descontinuidades pode ser de segunda espécie.

    Observação. Usando o conceito de tipos de descontinuidade, é possível mostrar que, se f é uma função monótona, então o conjunto de seus pontos de descontinuidade é enumerável. Veja o livro do Elon.

12. Prove, usando o Teorema do Valor Intermediário, que todo polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau ímpar possui uma raiz real.

Continuidade uniforme

13. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dê um exemplo em que X é fechado, f é contínua, mas $f(X)$ não é fechado.

14. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dê um exemplo em que X é limitado, f é contínua, mas $f(X)$ não é limitado.

15. Dê um exemplo de função contínua definida num conjunto limitado que não é uniformemente contínua. Dê um exemplo de função contínua definida num conjunto aberto que é uniformemente contínua.

16. Dê um exemplo de função contínua definida num conjunto fechado que não é uniformemente contínua. Dê um exemplo de função contínua definida num conjunto ilimitado que é uniformemente contínua.

17. (*) Mostre que toda função de Lipschitz é uniformemente contínua.

18. Mostre que:

    - a soma de duas funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua;
    - a composta de duas funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua;
    - o máximo e o mínimo de duas funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua;
    - o produto de duas funções uniformemente contínuas pode não ser uniformemente contínuo, a menos que as funções sejam limitadas.

19. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

    $$f(x) = \sin(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \sin(x^2).$$

    Mostre que f é uniformemente contínua e que g não é.

    Dica: Para f: use a identidade trigonométrica $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
    Para g: prove por absurdo construindo sequências (x_n) e (y_n) tais que $|x_n - y_n| \to 0$.

20. Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^3$ não é uniformemente contínua.

21. Prove que $f : [a, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ $(a > 0)$ é uniformemente contínua.

    Dica. Aplique o Teorema do Valor Médio e use o Exercício 17.

22. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona, contínua e limitada. Prove que f é uniformemente contínua.

23. Considere $f : D_f \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$. Prove que

    (a) f não é uniformemente contínua se $D_f = (0, \infty)$; (**Dica:** use Teorema Lc.3.16)

    (b) f é uniformemente contínua se $D_f = [a, \infty)$, $a > 0$;

    (c) f é uniformemente contínua se $D_f = [a, b] \subset (0, \infty)$.