

Lista n.3

**Exercício 1** Para o  $\varepsilon$  dado, calcule um  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  para todo  $x$  tal que  $0 < |x - p| < \delta$ .

a)  $f(x) = x + 3; L = 5; p = 2; \varepsilon = 0.01;$

b)  $f(x) = -3x + 1; L = -2; p = 1; \varepsilon = 0.01;$

c)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}; L = -1; p = 0; \varepsilon = 1;$

**Exercício 2** Demonstre, utilizando a definição de limite, que:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16$    (b)  $\lim_{x \rightarrow -1} (11x + 5) = -6$    (c)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 8\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

**Exercício 3** Demonstre, utilizando a definição, que:

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto c$  é contínua para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ , isto é, mostre que  $\lim_{x \rightarrow p} c = c, \forall p \in \mathbb{R}$ .

(b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$  é contínua, isto é, mostre que  $\lim_{x \rightarrow p} x = p, \forall p \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 4** Dê um exemplo de uma função definida em  $\mathbb{R}$ , de maneira que seja contínua em todos os pontos de  $\mathbb{R}$  exceto nos inteiros.

**Exercício 5** Determinar os valores  $x$  nos quais a função dada é contínua, e os nos quais é descontínua:

(a)  $f(x) = x^2(x + 3)^2$

(b)  $g(x) = \cos\left(\frac{x}{x-3}\right)$

(c)  $h(x) = \frac{x^3 + 7}{x^2 - 4}$

(d)  $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x < 2 \\ 4 - x^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

(e)  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(f)  $h(x) = \frac{|x + 4|}{x + 4}$

(g)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-3} & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \end{cases}$

(h)  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(i)  $h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

**Exercício 6** Dê o valor, caso exista, que a função deveria assumir no ponto dado para ser contínua:

(a)  $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$  em  $p = 4$    (b)  $f(x) = \frac{x^3 - x}{x}$  em  $p = 0$    (c)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  em  $p = 0$

(d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 81}{x - 9}, & x \neq 9 \\ 10, & x = 9 \end{cases}$  em  $p = 9$    (e)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$  em  $p = 1$

(f)  $f(x) = \frac{|x - 5|}{x - 5}$  em  $p = 5$

**Exercício 7** Calcule o limite, se existir:

(a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$    (b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h - 5)^2 - 25}{h}$    (c)  $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$    (d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$

**Exercício 8** Calcule os limites abaixo, justificando cada passagem:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 17} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{17}}{x - 17}$    (b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5 + x} - 3}{\sqrt{5 - x} - 1}$    (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5}}$    (d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sin\left(\pi \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}\right)$

**Exercício 9** Determine  $L$  para que a função  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{11}}{\sqrt{x + 11} - \sqrt{22}}, & x \neq 11 \\ L & x = 11 \end{cases}$

seja contínua em  $p = 11$ .

**Exercício 10** A função  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}, & x \neq -1 \\ 2 & x = -1 \end{cases}$  é contínua em  $p = -1$ ? E em  $p = 0$ ?

Justifique.

**Exercício 11** É falsa ou verdadeira a seguinte afirmação

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) \implies f \text{ é contínua em } p$$

Justifique.

**Exercício 12** Calcule:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} & \quad \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} & \quad \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3} \\ \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-1|}{x-1} & \quad \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 6x + 9}{x-3} \end{aligned}$$

**Exercício 13** Encontrar (se for possível) L e M de forma que a função dada seja contínua:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \\ L & \text{se } x = 0 \\ 1 + Mx & \text{se } x > 0 \end{cases} & \quad \text{(b)} \quad g(x) &= \begin{cases} (x-1)^2 & \text{se } x < 1 \\ L & \text{se } x = 1 \\ x-2 & \text{se } x > 1 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x > 1 \\ Lx + M & \text{se } x \in [0, 1] \\ e^x & \text{se } x < 0 \end{cases} & \quad \text{(d)} \quad g(x) &= \begin{cases} L(x+1)^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \sin(x) + M & \text{se } x \in (0, \pi] \\ \cos(x) & \text{se } x > \pi \end{cases} \end{aligned}$$

**Exercício 14** Seja  $f$  uma função contínua no ponto 3, e  $f(3) = 10$ . Mostre que existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in D_f$ ,

$$3 - \delta < x < 3 + \delta \implies f(x) > 9.$$

**Exercício 15** Seja  $f$  uma função definida em  $\mathbb{R}$  e suponha que existe  $M > 0$  tal que  $|f(x) - f(p)| \leq M|x - p|$  para todo  $x$ . Prove que  $f$  é contínua em  $p$ .

**Exercício 16** Considere as funções  $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{para } x \neq \pi, \\ 1, & \text{para } x = \pi. \end{cases}$  e  $g(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{para } x \geq \pi, \\ x \cos(x), & \text{para } x < \pi. \end{cases}$

Calcule (justificando!!)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & \quad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) & \quad \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) & \quad \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} g(x) \\ \text{e)} \quad f \text{ é contínua? } & \quad g \text{ é contínua? (justifique)} \end{aligned}$$

**Exercício 17** Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$  calcule

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & \quad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} & \quad \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^2} & \quad \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos(x))}{\cos(x)} \end{aligned}$$

GABARITO

**Exercício 5:** b) contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ , g) contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ , descontínua em 3, h) contínua em  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 6** (a) 8 (b) -1 (c) não existe (d) 18 (e) 1 (f) não existe

**Exercício 8** (a)  $\frac{1}{3\sqrt[3]{289}}$  (b)  $-\frac{1}{3}$

**Exercício 9**  $\sqrt{2}$ .

**Exercício 10**  $f$  é contínua em  $p = 0$ , mas não é contínua em  $p = -1$ .

**Exercício 12:** (a) 1 (b) -1 (c) não existe (d) 1 (e) 0

**Exercício 13:** a)  $L = 1$ , b)  $\nexists L$ .