$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-333- Cálculo 3

Eugenio Massa

1. Verifique, através de uma mudança de índices, que as duas somas são idênticas.

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{k}{k^2+1}, \qquad \sum_{k=-1}^{7} \frac{n+3}{n^2+6n+10}.$$

2. Calcule os primeiros 3 termos da série dada e os 3 primeiros termos da seqüência $\{s_n\}$ das somas parciais da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

3. Mostre que a sequência $S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ não é se Cauchy. Deduza que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$. (Sugestão: considere, para $j \in \mathbb{N}$, a soma $\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{n}$)

4. (**Teorema da contração**) Mostre que a sequência definida por $a_0 = 1$, $a_{n+1} = f(a_n)$ converge, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua e satisfaz $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ para um $\lambda \in (0, 1)$ e todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre também que se $z = \lim_{n\to\infty} a_n$ então $f(z) = z$.

5. Seja

$$b_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

   a) Determine se a seqüência $\{b_n\}$ é convergente.

   b) Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.

6. Usando a teoria das séries geométricas, expresse os números abaixo listados como uma razão de inteiros:

$$0,\overline{14} \qquad \text{e} \qquad 1,24\overline{333}\,.$$

7. Determine se a série converge, diverge ou oscila, justificando a resposta. Se a série for convergente, calcule a soma.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{4^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n+3^n}{4^n}\right)$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{(n-1)}}{(-2)^{(n-1)}} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}}$$

8. Determine os valores de x para os quais a série converge:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$$

$$d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n} \qquad e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} \qquad f) \sum_{n=0}^{\infty} (\tan x)^n$$

9. Diga se a série é convergente ou não. Se for convergente, calcule a sua soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

10. Sejam $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ duas séries. Dizer se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas (**caso a afirmação seja falsa, dê um contra-exemplo**).

a) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então certamente a série $\sum_n a_n$ converge.

b) Se a série $\sum_n a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) Se ambas as séries convergem, a série $\sum_n (a_n - b_n)$ converge.

d) Se ambas as séries divergem, a série $\sum_n (a_n + b_n)$ diverge.

e) Se a série $\sum_n a_n$ diverge e c é uma constante não nula, então a série $\sum_n (c\, a_n)$ diverge.

11. Use o **Teste de comparação** ou o **Teste de comparação no limite** para determinar quais das séries convergem e quais divergem.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2(5n^3+n-4)} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{\sqrt{n}\ln n} \qquad c)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(n^2+1)}{n^2(5n^3+n-4)}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{\sqrt{n^8-n+1}} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n(n^2+7n-1)} \qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin n}{5^n} \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$$

Dica: lembrar que $\ln n < n$ e que se $n > e$ então $\ln n > 1$.

12. a) Usando o Princípio de indução matemática, prove que

$$n! < n^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

b) Use o resultado do ítem a) para provar que a seguinte série converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_n(n!)}{n^3}$$

13. Use o **Teste da raiz** ou o **Teste da razão** para determinar se a série converge ou diverge.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^5}\right)^n$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2} \qquad e)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{n/3}} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}$$

$$g)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n\ln n} \qquad h)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(\ln n)^2}{n(\ln n)^2} \qquad i)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!\, n^3}$$

14. a) Seja j um inteiro positivo. Prove que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{k=j}^{\infty} a_k$ converge.

b) Mostre que, se $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$, então $\displaystyle\sum_{k=j}^{\infty} a_k = L - \sum_{k=0}^{j-1} a_k$.

c) Mostre que, se $\displaystyle\sum_{k=j}^{\infty} a_k = M$, então $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = M + \sum_{k=0}^{j-1} a_k$.

15. a) Provar que se a série $\sum_k a_k$ $(a_k \neq 0)$ converge, então a série $\sum_k \frac{1}{a_k}$ não converge.

b) Suponha que $a_k > 0$ para todo k e que $\sum_k a_k$ diverge. Mostre, através de exemplos, que $\sum_k (1/a_k)$ pode convergir ou divergir.

16. Suponha que a série $\sum_n a_n$ tenha termos positivos e que a seqüência das somas parciais $\{s_n\}$ seja tal que $s_n \leq 2007$ para todo n. Explique por que podemos concluir que a série deve ser convergente.