

2ª Lista de Exercícios de SMA380 - Análise*Ana Peron & Eugenio Massa***Séries numéricas 1**

1. Verifique, através de uma mudança de índices, que as duas somas são idênticas.

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{k}{k^2 + 1}, \quad \sum_{k=-1}^7 \frac{n+3}{n^2 + 6n + 10}.$$

2. Calcule os primeiros 3 termos da série dada e os 3 primeiros termos da sequência $\{S_k\}$ das somas parciais da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

3. (**Teorema da contração**) Mostre que a sequência definida por $a_0 = 1$, $a_{n+1} = f(a_n)$ converge, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ para um $\lambda \in (0, 1)$ e todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre também que se $z = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ então $f(z) = z$.

4. Seja

$$b_n = n \sin \left(\frac{1}{n} \right).$$

- a) Determine se a sequência $\{b_n\}$ é convergente.
 b) Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.
5. Usando a teoria das séries geométricas, expresse os números abaixo listados como uma razão de inteiros:

$$0, \overline{14} \quad \text{e} \quad 1, \overline{24333}.$$

6. Componha uma série infinita cuja soma seja 5.
7. Determine se a série converge, diverge ou oscila, justificando a resposta. Se a série for convergente, calcule a soma.

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{4^n} & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} & c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{4^n} \right) \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{(n-1)}}{(-2)^{(n-1)}} & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}} \end{array}$$

8. Determine os valores de x para os quais a série converge:

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} & b) \sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n & c) \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n \\ d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n} & e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} & f) \sum_{n=0}^{\infty} (\tan x)^n \end{array}$$

9. (*) Seja $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ uma sequência e considere a série dada por $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$
- (a) Encontre uma expressão para a soma parcial S_k (chamada *soma telescópica*).
- (b) O que podemos dizer sobre a convergência da série?

10. Diga se a série é convergente ou não. Se for convergente, calcule a sua soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

11. Sejam $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ duas séries. Dizer se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas (caso a afirmação seja falsa, dê um contra-exemplo).

- a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então certamente a série $\sum_n a_n$ converge.
- b) Se a série $\sum_n a_n$ converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- c) Se ambas as séries convergem, a série $\sum_n (a_n - b_n)$ converge.
- d) Se ambas as séries divergem, a série $\sum_n (a_n + b_n)$ diverge.
- e) Se a série $\sum_n a_n$ diverge e c é uma constante não nula, então a série $\sum_n (c a_n)$ diverge.

12. Use o **confronto** ou o **confronto assintótico** para determinar quais das séries convergem e quais divergem.

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ \sin(n) }{n^2(5n^3 + n - 4)}$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{\sqrt{n^8 - n + 1}}$ | (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ |
| (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{\sqrt{n} \ln n}$ | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{3^n(n^2 + 7n - 1)}$ | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n + 1}$ |
| (c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$ | (g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (\ln n)^2}{n(\ln n)^2}$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5 + 2 \cos(n)}{A} \right)^n$: |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(n^2+1)}{n^2(5n^3+n-4)}$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1 + e^{2n}}$ | $A = 2, 6, 9.$ |

Dica: lembrar que $\ln n < n$ e que se $n > e$ então $\ln n > 1$.

13. a) Prove que

$$2^n \leq n!, \quad \forall n \geq 4.$$

- b) Use o resultado do item a) para encontrar quantos termos de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ devemos somar para obter um resultado com erro $< 10^{-3}$.
(Compare o resultado com o obtido em sala de aula: 1001 termos.)

14. a) Usando o Princípio de indução matemática, prove que

$$n! < n^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

- b) Use o resultado do item a) para provar que a seguinte série converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_n(n!)}{n^3}.$$

15. Use o **Teste da raiz** ou o **Teste da razão** para determinar se a série converge ou diverge.

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n} & b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} & c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^5} \right)^n \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2} & e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{n/3}} & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)} \\ g) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n \ln n} & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sin n}{5^n} & i) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! n^3} \quad j) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \end{array}$$

16. a) Provar que se a série $\sum_k a_k$ ($a_k \neq 0$) converge, então a série $\sum_k \frac{1}{a_k}$ não converge.
 b) Suponha que $a_k > 0$ para todo k e que $\sum_k a_k$ diverge. Mostre, através de exemplos, que $\sum_k (1/a_k)$ pode convergir ou divergir.
17. Suponha que a série $\sum_n a_n$ tenha termos positivos e que a sequência das somas parciais $\{s_n\}$ seja tal que $s_n \leq 2007$ para todo n . Explique por que podemos concluir que a série deve ser convergente.
18. Use o **Teste da integral** para determinar se a série converge ou diverge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^p} : \quad \alpha, p \in \mathbb{R} \quad (\text{L2.a.0.1})$$

Sugestão: considere a parte o caso $\alpha = 1$.

19. Determine se a série converge ou diverge, justificando a resposta.

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{n=1}^{\infty} 6n^{-1,01} & b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt[n]{n}} \right) & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^\pi} & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \arctan n}{n^{1.001}} \\ e) 3 + \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{3}{4\sqrt{4}} + \cdots \end{array}$$

20. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, o que podemos dizer sobre a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n)$? Justifique.
21. Prove que se $\sum a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, então $\sum a_n^2$ converge.

22. Sejam $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots$ e $\sum b_n = b_1 + b_2 + \dots$ séries convergentes com somas S e T respectivamente. Prove que:

- (a) (associativa) inserindo parênteses entre os termos da série $\sum a_n$, obtêm-se uma nova série convergente com soma S :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \dots = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots = a_1 + (a_2 + a_3) + a_4 + (a_5 + a_6 + a_7) + \dots = \dots = S$$

- (b) (dissociativa) $\sum (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots$