

3ª Lista de Exercícios de SMA380 - Análise

Ana Peron & Eugenio Massa

Séries numéricas 2

1. Use o **Teste de Leibnitz** para determinar se a série converge ou diverge.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

2. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas; se for falsa forneça um contraexemplo.

(a) toda série alternada é condicionalmente convergente.

(b) toda série absolutamente convergente é convergente.

(c) toda série convergente é absolutamente convergente.

(d) toda série alternada converge.

(e) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem então $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n$ diverge para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f) se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente.

3. Estime o número de termos que precisa somar para aproximar as seguintes séries com erro menor do ε dado.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \varepsilon = 10^{-3} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \varepsilon = 10^{-10} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5 + 2 \cos(n)}{10} \right)^n, \varepsilon = 10^{-5}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(25/n), \varepsilon = 10^{-2} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{10^n}, \varepsilon = 10^{-10} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}, \varepsilon = 10^{-2}$$

4. Quais das séries convergem **absolutamente**, quais convergem **condicionalmente**, quais divergem e quais são oscilantes?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin n}{n!} \right)$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{(2n)^n} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+n} - n)$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.01)^n}{n} \quad i) \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n+1} \frac{1}{n+5^n}$$

$$l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(\frac{n\pi}{6} \right)}{n^3 \sqrt{n}}$$

5. Quais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas recursivamente como abaixo convergem e quais divergem? **Justifique.**

$$a) a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{11n^3 + 5n^2 + 1}{2n + 9n^3} a_n$$

$$b) a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$$

$$c) a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{\pi + \arctan n}{2n^2} a_n$$

6. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série condicionalmente convergente e

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0, \end{cases} \quad c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ a_n & \text{se } a_n < 0. \end{cases}$$

Prove que ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergem.

7. Determine se a série converge ou diverge, justificando a resposta.

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \ln n)^2} & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \ln n}{n^3} & c) \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cos(n\pi) & d) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) \\ e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n} & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!} & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\sqrt{n}} & h) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^3} \\ i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n^{\frac{3}{2}}} & l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} & m) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5 - \sin(n)}\right)^n & n) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3 - \sin(n)}\right)^n \\ o) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{n} & p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n} & q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/2)}{n} & r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/n)}{n} \\ s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} & t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n} & u) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/15)}{n} & v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n} \end{array}$$

8. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1 + x^2)^{n-1}}$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Prove que $\forall x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1 + x^n)^2}$$

converge.

10. (!) Mostre que a integral imprópria $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge, aplicando o critério de Leibnitz à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Mostre que a série não é absolutamente convergente.

11. Diga (justificando) quando é possível definir a soma dos elementos dos conjuntos a seguir; no caso, calcule esta soma.

$$a) \{n : n \in \mathbb{N}\} \quad b) \{1/[n(n+1)] : n \in \mathbb{N}\}$$

12. (a) Enuncie e prove uma versão do Critério de Dirichlet (Teorema B3.6) trocando a hipótese “ $\{b_n\}$ decrescente” por “ $\{b_n\}$ crescente”.
- (b) Analisando as duas versões, enuncie o Critério de Dirichlet na forma mais geral possível.
- (c) Faça uma análise crítica rigorosa sobre as hipóteses impostas para a sequência $\{b_n\}$: todas elas são necessárias? Faça o mesmo com o Critério de Leibnitz (Teorema B3.4).
13. (Teste de Abel) Seja $a_n = s_n b_n$. Se a série $\sum s_n$ é convergente e $\{b_n\}$ é uma sequência monótona e limitada, então $\sum a_n$ é convergente.
14. Considere a sequência $\{s_n\}$ cujos termos são dados por $s_n = 2$ se 3 divide n e $s_n = -1$ se 3 não divide n . Discuta a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}.$$

15. Sejam $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots$ e $\sum b_n = b_1 + b_2 + \dots$ séries convergentes com somas S e T respectivamente. Prove que:

- (a) (associativa) inserindo parênteses entre os termos da série $\sum a_n$, obtêm-se uma nova série convergente com soma S :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \dots = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots = a_1 + (a_2 + a_3) + a_4 + (a_5 + a_6 + a_7) + \dots = \dots = S$$

- (b) (dissociativa) $\sum (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots$