1ª Lista de Exercícios de SMA-333- Cálculo 3

Eugenio Massa

1. Mostre (por indução) as seguintes afirmaçõs:
   a) $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$ b) $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ c) $\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2$
   d) $n! \geq 2^{n-1}$ e) dados $x_1,..,x_n$ $(n \geq 2)$ reais positivos, cujo produto seja 1, vale $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$.
   f) se $x > -1$ então $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Calcule sup e inf e encontre todos os pontos de acumulação dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ abaixo:

   a) Conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$;
   b) conjunto $X = \left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$.
   c) conjunto $[0,1) \cup \{3\}$.

3. Calcule os primeiros 3 termos de cada seqüência e também o 5°:
   a) $\left\{a_n = \frac{n}{2^n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ b) $\{(-1)^{n^2} n\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\{2 + \cos(n\,\pi)\}_{n=0}^{\infty}$
   d) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n - 2}, \quad \forall n \geq 2$

4. Encontre uma possível expressão do termo geral (n-ésimo termo) de cada seqüência.
   a) $0, 2, 0, 2, 0, 2 \ldots$ b) $0, 4, 16, 36, 64, 100, \ldots$ c) $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots$ d) $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$

5. Determine se cada seqüência converge ou diverge. Se convergir, calcule seu limite.

   a) $\left\{-\frac{\ln(n^2)}{n}\right\}$ *b)* $\left\{\sin n \left(\ln n - \frac{1}{2}\ln(n^2+1)\right)\right\}$ *c)* $\left\{(1+3n)^{\frac{1}{n}}\right\}$

   d) $\left\{\ln\left(1 - \frac{7}{n}\right)^n\right\}$ *e)* $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+2} - n}\right\}$ *f)* $\left\{\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$

   g) $\left\{\frac{n}{3^n}\right\}$ *h)* $\left\{\frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}}\right\}$ *i)* $\{n\,[2 - \sin(n^2+1)]\}$

   l) $\left\{\frac{(-1)^n \cos n}{4^n}\right\}$ *m)* $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^3 - 3}\right\}$ *n)* $\left\{\frac{3 + \sin n}{n}\right\}$

   o) $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right\}$ *p)* $\left\{6\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right\}$ *q)* $\{[\cos(n+1)]^2 - n^2\}$

   r) $\left\{\frac{1}{n}\sin(n)\right\}$ *s)* $\left\{n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ *t)* $\left\{\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\right\} : \ \alpha > 0$

6. Mostre que, se $0 < c < d$, então a seqüência

$$a_n = (c^n + d^n)^{1/n}$$

   é limitada. Em seguida mostre que ela converge a d (sugestão: use o confronto).

7. Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ sequências tais que $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$: mostre que se $a_n \to a$ então $b_n \to a$.

8. Mostre que combinações lineares e produtos de seqüências limitadas são limitados.

9. Prove que:

   a) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right) = +\infty$

   b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$

10. Prove que se a seqüência $\{a_n\}$ é limitada e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ então $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = 0$.

11. Determine se a seqüência abaixo é crescente, decrescente ou não monótona e também se ela é limitada superiormente ou inferiormente. Indique, justificando, se a seqüência é convergente ou divergente.

$$a)\ \left\{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad b)\ \{(-1)^{2n}\}_{n=0}^{\infty} \qquad c)\ \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$d)\ \left\{\frac{3^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad e)\ \{\sin(\pi n)\}_{n=0}^{\infty} \qquad f)\ \left\{\frac{2n-1}{3n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

12. Encontre os seis primeiros termos da seqüência e, depois, encontre o n-ésimo termo.
a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\, a_n$ b) $a_1 = 1,\ a_2 = 3;\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1},\ n \geq 2$

13. Dada a seqüência:

$$\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\}$$

diga se é crescente, decrescente ou não monótona, se é limitada, e calcule o seu limite (sugestão: pode tentar escrever na forma $a_{n+1} = f(a_n)$).

14. Mostre que a seqüência definida recursivamente por:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

satisfaz $0 < a_n < 2$ e é crescente. Podemos concluir que ela converge? Se sim, justifique e calcule o seu limite.

15. Mostre que a seqüência definida recursivamente por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$ é decrescente e satisfaz $0 < a_n \leq 2,\ \forall n \geq 1$. Deduza que $\{a_n\}$ converge e encontre seu limite.

16. Usando a definição, prove que se $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$. Se $L \neq 0$ temos que o vice-versa não vale, **dê um exemplo**.

17. Diga se a seqüência de termo geral $a_n = \displaystyle\int_{-n}^{0} e^{2x}\,dx$ é convergente para $n \to \infty$.

18. Calcule limite inferior e limite superior das sequências abaixo.
a) $(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$ b) $((-1)^n + 1)\frac{n+1}{n}$ c) $n^{(-1)^n}$ d) $\sin(n)$ e) $\frac{1}{n}\sin(n)$

19. Calcule
a) $\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ onde $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
b) $\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ onde $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\right\}$