

1ª Lista de Exercícios de SMA380 - Análise

Ana Peron & Eugenio Massa

Sequências numéricas

1. Determine se cada sequência converge, diverge ou é oscilante. Se convergir, calcule seu limite.

a) $\left\{ -\frac{\ln(n^2)}{n} \right\}$	b) $\left\{ \sin n \left(\ln n - \frac{1}{2} \ln(n^2 + 1) \right) \right\}$	c) $\left\{ (1 + 3n)^{\frac{1}{n}} \right\}$
d) $\left\{ \ln \left(1 - \frac{7}{n} \right)^n \right\}$	e) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} - n} \right\}$	f) $\left\{ \left(\frac{3}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$
g) $\left\{ \frac{n}{3^n} \right\}$	h) $\left\{ \frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}} \right\}$	i) $\{n[2 - \sin(n^2 + 1)]\}$
l) $\left\{ \frac{(-1)^n \cos n}{4^n} \right\}$	m) $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^3 - 3} \right\}$	n) $\left\{ \frac{3 + \sin n}{n} \right\}$
o) $\left\{ \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 1 \right\}$	p) $\left\{ 6 \left(-\frac{5}{6} \right)^n \right\}$	q) $\{[\cos(n + 1)]^2 - n^2\}$
r) $\left\{ \frac{1}{n} \sin(n) \right\}$	s) $\left\{ n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$	t) $\left\{ \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} \right\} : \alpha > 0$

2. Determine se cada sequência converge, diverge ou é oscilante. Se convergir, calcule seu limite.

a) $\left\{ \frac{3^n}{n!} \right\}$ b) $\left\{ \sqrt[n]{n} \right\}$ c) $\left\{ \frac{3^n}{n^n} \right\}$ d) $\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}$

3. (*) Calcule os limites a seguir, usando as propriedades ou os teoremas conhecidos e justificando cada passagem.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + n} - 2n$	b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n[2 - \sin(n^2 + 1)]$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - \cos(1/n))$	d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n[4 - e^{-\cos(n)}]$
e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \left(\frac{n^2 + 1}{n^4 + 2} \right)$	f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$

4. Mostre que, se $0 < c < d$, então a sequência

$$a_n = (c^n + d^n)^{1/n}$$

é limitada. Em seguida mostre que ela converge a d (sugestão: use o confronto).

5. Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ sequências tais que $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$: mostre que se $a_n \rightarrow a$ então $b_n \rightarrow a$.

6. Prove que:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$

7. (*) Prove que se a sequência $\{a_n\}$ é limitada e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = 0$.

8. (*) Prove que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ se e só se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = a$.

9. Determine se a sequência abaixo é crescente, decrescente ou não monótona e também se ela é limitada superiormente ou inferiormente. Indique, justificando, se a sequência é convergente ou divergente.

$$\begin{array}{lll} a) \left\{ \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty} & b) \{(-1)^{2n}\}_{n=0}^{\infty} & c) \left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}_{n=1}^{\infty} \\ d) \left\{ \frac{3^n}{n!} \right\}_{n=1}^{\infty} & e) \{\sin(\pi n)\}_{n=0}^{\infty} & f) \left\{ \frac{2n-1}{3n+1} \right\}_{n=0}^{\infty} \end{array}$$

10. Calcule os primeiros 3 termos de cada sequência e também o 5º:

$$\begin{array}{lll} a) \left\{ a_n = \frac{n}{2^n+1} \right\}_{n=0}^{\infty} & b) \{(-1)^{n^2} n\}_{n=1}^{\infty} & c) \{2 + \cos(n\pi)\}_{n=0}^{\infty} \\ d) a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n-2}, \quad \forall n \geq 2 \end{array}$$

11. Encontre uma possível expressão do termo geral (n -ésimo termo) de cada sequência.

$$a) 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots \quad b) 0, 4, 16, 36, 64, 100, \dots \quad c) 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \dots \quad d) 1, 2, 6, 24, 120, \dots$$

12. Encontre os seis primeiros termos da sequência e, depois, encontre o n -ésimo termo.

$$a) a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n \quad b) a_1 = 1, \quad a_2 = 3; \quad a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}, \quad n \geq 2$$

13. Use o método de iteração para obter a solução explícita das recorrências definidas por

$$\begin{array}{l} a) a_n = 2a_{n-1} + 1, \text{ sendo } a_1 = 3. \\ b) a_n = -3a_{n-1} + 1, \text{ sendo } a_1 = 1. \\ c) a_n = (a_{n-1})^2, \text{ sendo } a_1 = 2 \\ d) a_n = \alpha a_{n-1} + \beta, \text{ sendo } a_0 = h \end{array}$$

14. Dada a sequência:

$$\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots\}$$

diga se é crescente, decrescente ou não monótona, se é limitada, e calcule o seu limite (sugestão: pode tentar escrever na forma $a_{n+1} = f(a_n)$).

15. Mostre que a sequência definida recursivamente por:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

satisfaz $0 < a_n < 2$ e é crescente. Podemos concluir que $\{a_n\}$ converge? Se sim, justifique e calcule o seu limite.

16. Mostre que a sequência definida recursivamente por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$ é decrescente e satisfaz $0 < a_n \leq 2, \forall n \geq 1$. Deduza que $\{a_n\}$ converge e encontre seu limite.

17. Diga se a sequência de termo geral $a_n = \int_{-n}^0 e^{2x} dx$ é convergente para $n \rightarrow \infty$.

18. Calcule limite inferior e limite superior das sequências abaixo.

$$a) (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n} \quad b) ((-1)^n + 1) \frac{n+1}{n} \quad c) n^{(-1)^n} \quad d) \sin(n) \quad e) \frac{1}{n} \sin(n)$$

19. (Precisam integrais múltiplas.) Calcule

$$\begin{array}{l} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ onde } A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \\ b) \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \text{ onde } A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\} \end{array}$$

20. Considere a sequência $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$. Mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, vale $\sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}+1} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}$.

Conclua que $\{a_n\}$ diverge.

21. Mostre que se $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy, então $\{x_n^2\}$ também é de Cauchy. Dê um exemplo em que $\{x_n^2\}$ é de Cauchy, mas $\{x_n\}$ não é.

22. (*) Se uma sequência de Cauchy $\{a_n\}$ possui uma subsequência que converge à L , então $a_n \rightarrow L$.