15ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Integrais impróprias

Exercício 1 Calcule ou determine se divergem as seguintes integrais impróprias:

$$(a)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (b)\ \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \quad (c)\ \int_0^{\pi} \sec^2 x\ dx \quad (d)\ \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$$

Exercício 2 Calcule:

$$(a)\ \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \quad (b)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}dx \quad (c)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \quad (d)\ \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{sen}x dx \quad (e)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-8)^{2/3}}dx$$

$$(f)\ \int_0^1 \frac{1}{x}dx \quad (g)\ \int_0^1 x^{-1/2}dx \quad (h)\ \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx \quad (i)\ \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \quad (j)\ \int_0^4 \frac{1}{x^2-x-2}dx$$

$$(l)\ \int_{e^{-1}}^{e} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx \quad \text{m)}\ \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\mathrm{sen}x}}dx \quad (n)\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+\mathrm{sen}^2 x}dx \quad (o)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 x dx$$

$$(p)\ \int_{-\infty}^{\pi/2} \mathrm{sen}(2x)dx \quad (q)\ \int_4^{+\infty} \frac{x+18}{x^2+x-12}dx \quad (r)\ \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-x-2}dx$$

Exercício 3 Use o Teorema do confronto para integrais impróprias, para determinar se a integral é convergente ou divergente.

$$(a)\ \int_1^{\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\ dx \quad (b)\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x+e^{2x}}\ dx \quad (c)\ \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx \quad (d)\ \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\ dx$$

Exercício 4 (*) (a) Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx$ é divergente.

(b) Mostre que $\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} x\ dx = 0$.

Isso mostra que não podemos definir $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} x\ dx$.

Exercício 5 Use o Teorema do confronto para integrais impróprias, para determinar se a integral é convergente ou divergente.

$$(a)\ \int_1^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x}\ dx \quad (b!)\ \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-x^4}\ dx \quad (c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2}\ dx \quad (d)\ \int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}\ dx$$

$$(e)\ \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}\ dx \quad (f!)\ \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ dx \quad (g)\ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x\sin(x)}\ dx \quad (h)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}\ dx$$

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ dx \quad (l!)\ \int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\ dx \quad (m!)\ \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{\cosh(x)}\ dx \quad (n!)\ \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sinh(x)}\ dx$$

Exercício 6 Detrminar $r, s > 0$ tais que

$$(a)\ \int_r^{\infty} \frac{|\sin x|}{1+x^2}\, dx < 0,001 \quad (b)\ \int_0^{s} \frac{1+x^2}{\sqrt{|\sin x|}}\, dx < 0,001$$

Exercício 7 (!)

Esboçar o gráfico das funções a seguir (considere as integrais em sentido impróprio)

$$(a)\ \int_1^x \frac{e^{t^2}}{\sqrt{|\cos(t)|}\ (t^2-9)}\ dt \qquad (b)\ \int_0^x \sqrt{|\tan(w)|}\ dw \qquad (c)\ \int_x^2 (x^2+x-2)(x-5)\ dx$$

$$(d)\ \int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2}\ dt \qquad (e)\ \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{|t-1|}}\ dt \qquad (f)\ \int_0^x \frac{e^t}{|t-1|}\ dt \qquad (f)\ \int_2^x \frac{e^t}{|t-1|}\ dt$$

Exercício 8 (!)

Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que $f\geq 1$ e $\int_0^1 f(x)\ dx$ converge:
Posso afirmar que $\int_0^1 [f(x)]^2\ dx$ converge? Se sim demonstrar, se não buscar um contra-exemplo.
Posso afirmar que $\int_0^1 \sqrt{f(x)}\ dx$ converge? Se sim demonstrar, se não buscar um contra-exemplo.

Exercício 9 (!)

Seja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $0\leq f\leq 1$ e $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ converge:
Posso afirmar que $\int_0^{+\infty} [f(x)]^2\ dx$ converge? Se sim demonstrar, se não buscar um contra-exemplo.
Posso afirmar que $\int_0^{+\infty} \sqrt{f(x)}\ dx$ converge? Se sim demonstrar, se não buscar um contra-exemplo.

Gabarito

Exercício 1: (a) $\pi/2$; (b) ∞; (c) ∞; (d) ∞

Exercício 2: (b) div; (c) π; (d) $1/2$; (j) div; (q) div; (r) $-(1/3)\ln(2/5)$;

Exercício 5: $a)$ div, $f)$ conv, $g)$ div, $h)$ conv, $i)$ conv, $l)$ conv, $m)$ conv, $n)$ div (onde?)

Exercício 6: (a) $r=1000$; (b) $s=10^{-8}$.