

14ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Aplicações da integral

Lembrete

- Se uma partícula se desloca com velocidade $v(t)$ ao longo de uma reta,
 - o **deslocamento** (variação da posição) entre t_1 e t_2 é $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(\tau) d\tau$
 - o **espaço percorrido** entre t_1 e t_2 é $e(t_2) - e(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} |v(\tau)| d\tau$

Exercício 1 Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = t^2 - 3t - 4$, $t \geq 0$.

- (a) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.
- (b) Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.

Exercício 2 Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = \cos t$, $t \geq 0$.

- (a) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi/2$.
- (b) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi$.
- (c) Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi/2$.
- (d) Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi$.

Exercício 3 • Calcule o movimento de uma partícula de massa m que desloca-se sobre o eixo $0x$, sujeita a uma força $F(t) = 1/(t + 1)$, sabendo que no instante $t = 0$ ela está na origem e sua velocidade é nula.

- Calcule o movimento de uma partícula de massa m que desloca-se sobre o eixo $0x$, sujeita a uma força $F(t) = 1/(t + 1)^2$, sabendo que no instante $t = 0$ ela está na origem e sua velocidade é $v_0 = -1$.
- Calcule o movimento de uma partícula de massa m que desloca-se sobre o eixo $0x$, sujeita a uma força $F(t) = 1/(t + 1)^3$, sabendo que no instante $t = 0$ ela está na origem e sua velocidade é $v_0 = -1/2$.

Exercício 4 Encontre a área da região limitada pelas curvas

- (a) $y = \cos x$ e $y = \sec^2 x$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$.
- (b) $y = \sin^4 x \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$ e o eixo x .

Exercício 5 As curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ se interceptam periodicamente. Encontre a área da região limitada por estas curvas entre pontos de intersecção consecutivos.

Exercício 6 Encontre a área da região limitada por $x = 4 - y^2$ e pelo eixo y .

Exercício 7 Encontre a área da região limitada por $y = x(x - 1)(x - 3)$ e pelo eixo x .

Exercício 8 Uma esfera de raio $r > 0$ pode ser vista como um sólido gerado pela rotação em torno do eixo x , da região sob a curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $|x| \leq r$. Usando isso, calcule o volume da esfera.

Exercício 9 Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x , dos seguintes conjuntos:

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq x\}$;
- (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$;
- (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq 1\}$;
- (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, \sqrt{x} \leq y \leq 3\}$.

Exercício 10 Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y , dos seguintes conjuntos:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$; (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq \sqrt[3]{x}\}$;

Exercício 11 Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pelas curvas dadas.

(a) $y = e^{-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$; (b) $x = 1+y^2, x = 0, y = 1, y = 2$; (c) $y = \ln x, y = 0, x = 2$.

Exercício 12 Considere o sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x , do conjunto

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Calcule: (a) o volume V do sólido; (b) a área lateral A do sólido.

Exercício 13 Encontre a área da superfície da esfera gerada pela rotação em torno do eixo x da curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}, |x| \leq a$.

Exercício 14 Calcule a área das seguintes superfícies geradas pela rotação das seguintes curvas em torno do eixo x , nos respectivos intervalos.

(a) $y = (1/3)x^3, 0 \leq x \leq 1$; (b) $y = x^{2/3}, 0 \leq x \leq 8$; (c) $y = e^x, 0 \leq x \leq 1$ (d) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi/2$

Exercício 15 Calcule o comprimento das seguintes curvas nos respectivos intervalos.

(a) $y = 2x^{3/2}, 0 \leq x \leq 1$; (b) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}, 0 \leq x \leq 1$; (c) $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, 1 \leq x \leq 3$

Exercício 16 A Lei de Newton da Gravitação Universal afirma que dois corpos com massas m_1 e m_2 atraem um ao outro com uma força de

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

onde r é a distância entre os corpos e G é a constante gravitacional. Se um dos corpos é fixo, encontre o trabalho necessário para mover o outro corpo de $r = a$ para $r = b$.

GABARITO

Exercício 1: (a) $-\frac{56}{3}$ (b) $\frac{56}{3}$

Exercício 2: (a) 1; (b) 0; (c) 1; (d) 2

Exercício 4: (a) $2 - \sqrt{2}$; (b) $\frac{1}{5}$

Exercício 5: $2\sqrt{2}$

Exercício 6: $16/3$

Exercício 7: $37/12$

Exercício 8: $(4/3)\pi r^3$

Exercício 13: $4\pi a^2$

Exercício 14: a) $(\pi/9)(2\sqrt{2} - 1)$ b) $(128\pi/1215)(125\sqrt{10} + 1)$

Exercício 15: a) $(2/27)(10\sqrt{10} - 1)$ b) $4/3$ (c) $14/3$