# 13ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

*Eugenio Massa*

## Cálculo de integrais 2

**Exercício 1** Calcule

(**a**) $\int \text{sen}^3 x\sqrt{\cos x}\, dx$ (**b**) $\int_0^\pi \text{sen}^2 \frac{t}{2} \cos^5 \frac{t}{2}\, dt$ (**c**) $\int \text{sen}^2 t \cos^2 t\, dt$ (**d**) $\int \frac{\sec^4 t}{\tan t}\, dt$

(**e**) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x \sec x\, dx$ (**f**) $\int \cot^4 t\, dt$

**Exercício 2** Calcule

(**a**) $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}\, dx$ (**b**) $\int_2^6 \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ (**c**) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ (**d**) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\, dx$

**Exercício 3** Calcule

(**a**) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x-6}\, dx$ (**b**) $\int \frac{x+5}{x^3-2x^2+x}\, dx$ (**c**) $\int \frac{x^2-x+5}{x(x^2+1)}\, dx$ (**d**) $\int \frac{2x^2+x+7}{(x^2+4)^2}\, dx$

(**e**) $\int \frac{x^2+3}{x^2-9}\, dx$ (**f**) $\int \frac{dx}{x^3-1}$ (**g**) $\int \frac{x+3}{x(x-3)(x-4)}\, dx$ (**h**) $\int \frac{3}{x^3-16x}\, dx$

(**i**) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2-2x}\, dx$ (**l**) $\int \frac{5}{(x^2-1)(x^2-9)}\, dx$ (**m**) $\int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}\, dx$

**Exercício 4** Calcule

(**a**) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\, dx$ (**b**) $\int_0^1 x^2 \arcsin x\, dx$ (**c**) $\int_0^\pi \frac{\sin x\, dx}{4+\cos^2 x}$

(**d**) $\int \frac{dx}{1-\text{sen} x+\cos x}$ Dica: Faça $u = \tan(x/2)$ e use as identidades $\text{sen} x = 2\text{sen}(x/2)\cos(x/2)$ e $\cos x = \cos^2(x/2) - \text{sen}^2(x/2)$

(**e**) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ (**f**) $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x^2-4}}$ (**g**) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$

## Gabarito

**Exercício 1** (**a**)$\frac{2}{7}(\cos x)^{7/2} - \frac{2}{3}(\cos x)^{3/2} + C$ (**b**)$\frac{16}{115}$ (**c**)$\frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin 4t + C$ (**d**)$\frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\tan t| + C$

(**e**)$\sqrt{3} + \ln(2-\sqrt{3})/2$ (**f**) $-\frac{1}{3}\cot^3 t + \cot t + t + C$??????????rifai: forse $x - cos/3sin^3 + 4cos/3sin$

**Exercício 2** (**a**)$9(2-\sqrt{2})$ (**b**)$\frac{1}{12}(3\sqrt{2}-\sqrt{10})$ (**c**) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$ (**d**)$\frac{(x^2-9)^{3/2}}{27x^3}$

**Exercício 3** (**a**)$\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{29}{5}\ln|x-3| + \frac{6}{5}\ln|x+2| + C$ (**b**)$5\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{6}{x-1} + C$

(**c**) $5\ln x - 2\ln(x^2+1) - \arctan x + C$ (**d**)$\frac{15}{16}\arctan\frac{x}{2} - \frac{x+4}{8(x^2+4)} + C$

(**e**) $x + 2\ln|x-3| - 2\ln|x+3| + C$

**Exercício 4** (**a**)$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + \arctan\sqrt{x} + C$ (**b**)$\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$ (**c**) $\arctan\frac{1}{2}$ (**d**) $-\ln\left|1-\tan\frac{x}{2}\right| + C$

(**e**)$\frac{3}{10}(x+1)^{2/3}(2x-3) + C$ (**f**)$\frac{1}{4}x\sqrt{x^2-4}(x^2+6) + 6\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C$ (**g**) $\arcsin\frac{x-3}{3} + C$

## Integração de funções racionais

Considere

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

onde $N$ e $D$ são polinômios.

- **passo 1:** reduza ao caso grau(N)<grau(D): para isso use divisão de polinômios: de fato existe uma unica escolha de polinômios $Q, R$ com grau(R)<grau(D) tais que

$$N(x) = Q(x)D(x) + R(x)\,.$$

Com isso,

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \left( Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \right) dx$$

- **passo 2:** (a partir de agora assuma grau(N)<grau(D)) Fatore o denominador: é sempre possível fatorar o polinômio $D(x)$ como produto de termos lineares $(x - r)$ e quadráticos irredutíveis $x^2 + 2\rho x + \sigma$ onde $\Delta = \rho^2 - \sigma < 0$:

$$D(x) = \alpha(x - r_1)^{k_1} \cdot (x - r_2)^{k_2} \;......\; (x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)^{h_1} \cdot (x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)^{h_2} \;...... \tag{1}$$

- **passo 3:** reescreva a função racional $N(x)/D(x)$ como soma de frações simples: se $D$ é fatorado como em (1), então podemos escrever de maneira única

$$\begin{aligned}
\frac{N(x)}{D(x)} \quad = \quad & \frac{A_{1,1}}{(x-r_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-r_1)^2} + ... + \frac{A_{1,k_1}}{(x-r_1)^{k_1}} + \\
& + \frac{A_{2,1}}{(x-r_2)} + \frac{A_{2,2}}{(x-r_2)^2} + ... + \frac{A_{2,k_2}}{(x-r_2)^{k_2}} + \\
& + .... + \\
& + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)^2} + ... + \frac{B_{1,h_1}x + C_{1,h_1}}{(x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)^{h_1}} + \\
& + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{(x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)^2} + ... + \frac{B_{2,h_2}x + C_{2,h_2}}{(x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)^{h_2}} + \\
& + ....+
\end{aligned}$$

- **passo 4:** integrar cada pedaço (lembre que integral indefinida faz sentido depois de fixar um intervalo contido no domínio da função):

  –
  $$\int \frac{A}{x - r} = A \,\ln|x - r| + k : k \in \mathbb{R}\,.$$

  –
  $$\int \frac{A}{(x-r)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + k : k \in \mathbb{R} \qquad\qquad (n > 1)\,.$$

  –
  $$\int \frac{Bx + C}{x^2 + 2\rho x + \sigma} \qquad\qquad (\sigma - \rho^2 > 0):$$

  Primeiro passo: reduzir o numerador a apenas uma constante fazendo aparecer a derivada do denominador: como

  $$Bx + C = \frac{B}{2}(2x + 2\rho) + C - B\rho$$

temos

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{x^2+2\rho x+\sigma} &= \frac{B}{2}\int \frac{2x+2\rho}{x^2+2\rho x+\sigma} + (C-B\rho)\int \frac{1}{x^2+2\rho x+\sigma} \\ &= \frac{B}{2}\ln\left(x^2+2\rho x+\sigma\right) + (C-B\rho)\int \frac{1}{x^2+2\rho x+\sigma}\end{aligned}$$

(observe que $x^2+2\rho x+\sigma>0$).

Para o segundo termo nosso objetivo é usar a intergal conhecida $\int \frac{dt}{1+t^2} = atg(t)$: observe que $x^2+2\rho x+\sigma = x^2+2\rho x+\rho^2+\sigma-\rho^2 = (x+\rho)^2+\sigma-\rho^2$ e que $\sigma-\rho^2>0$, assim pode ser escrito como $\left(\sqrt{\sigma-\rho^2}\right)^2$.

logo

$$\int \frac{1}{x^2+2\rho x+\sigma} = \int \frac{1/(\sigma-\rho^2)}{1+\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\int \frac{1/\sqrt{\sigma-\rho^2}}{1+\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\,atg\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right).$$

Em conclusão,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+2\rho x+\sigma} = \frac{B}{2}\ln\left(x^2+2\rho x+\sigma\right) + \frac{C-B\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\,atg\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right) + k : k\in\mathbb{R}$$

–

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n} \qquad\qquad (\sigma-\rho^2>0, n>1):$$

neste caso podemos fazer como antes obtendo

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n} &= \frac{B}{2}\int \frac{2x+2\rho}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n} + (C-B\rho)\int \frac{1}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n} \\ &= \frac{B}{2}\frac{1}{(1-n)\left(x^2+2\rho x+\sigma\right)^{n-1}} + (C-B\rho)\int \frac{1}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n}\end{aligned}$$

e ainda

$$\int \frac{dx}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n} = \int \frac{1/(\sigma-\rho^2)^n}{\left(1+\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2\right)^n}\,dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma-\rho^2}^{2n-1}}\int \frac{1/\sqrt{\sigma-\rho^2}}{\left(1+\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2\right)^n}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma-\rho^2}^{2n-1}}\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

sendo $t=\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}$.

A última integral pode ser calculada iterativamente desta forma:

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} - \int t\frac{t}{(1+t^2)^n}$$

e, ainda integrando por partes,

$$\int t\frac{t}{(1+t^2)^n} = \int t\frac{1}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^n} = t\frac{1/2}{(1-n)(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{1/2}{(1-n)(1+t^2)^{n-1}},$$

isto é,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+t^2)^n} &= -t\frac{1/2}{(1-n)(1+t^2)^{n-1}} + \left(1+\frac{1}{2-2n}\right)\int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} \\ &= \frac{t}{2}\frac{1}{(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} :\end{aligned}$$

depois de $n-1$ iterações o expoente de $(1+t^2)$ é 1 e sabemos integrar.

Por exemplo,

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2} + atg(t)\right) + k : k \in \mathbb{R}$$

- Técnica alternativa: também podemos sempre escrever

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-r_1)} + \frac{A_{2,1}}{(x-r_2)} + .... + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2+2\rho_1 x+\sigma_1)} + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{(x^2+2\rho_2 x+\sigma_2)} + .... + \left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)'$$

onde

$$G(x) = (x-r_1)^{k_1-1}\cdot(x-r_2)^{k_2-1} \;......\; (x^2+2\rho_1 x+\sigma_1)^{h_1-1}\cdot(x^2+2\rho_2 x+\sigma_2)^{h_2-1} \;......$$

e $F(x)$ é um polinômio incógnito com grau(F)<grau(G). Feito isso a integração é imediata.

**Resumindo**, a primitiva de uma qualquer função racional é sempre calculável: é uma combinação de funções racionais, logaritmos de polinômios e arcotangentes de polinômios.