11^{a} Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Definição e propriedades da integral

Exercícios sobre a definição da integral

Exercício 1 (*) Mostre, usando a definição de integral, que uma função f de domínio $[0,1]$ que seja diferente de zero apenas num número finito de pontos, é integrável, e $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Exercício 2 (*) Mostre, usando a definição de integral, que:
a) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função par e é integrável em $[a,b]$, então é também integrável em $[-b,-a]$ e vale $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$. Deduza que se $a=-b$ então $\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$.
b) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função ímpar e é integrável em $[a,b]$, então é também integrável em $[-b,-a]$ e vale $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$. Deduza que se $a=-b$ então $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Exercício 3 Estime por cima e por baixo as seguintes integrais (sem calculá-las):
(**a**) $\displaystyle\int_3^6 (4x-1)dx$ (**b**) $\displaystyle\int_{-2}^3 x^2\,dx$ (**c**) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$ (**d**) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{4}{1+u^2}\,du.$

Exercício 4 (!) Considere as funções a seguir ($[[\,y\,]]$ é parte inteira de y):

$$f_1(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & x\in(0,1],\\ 0 & x=0\end{cases},\qquad f_2(x)=\begin{cases}[[\,\sin(1/x)\,]] & x\in(0,1],\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Elas são integráveis em $[0,1]$?
Sugestão: em quantos pontos elas são descontínuas? Se isso não for suficiente, mostre que para todo ε pode encontrar uma partição de $[0,1]$ tal que $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$: para isso escolha apropriadamente o x_1 da partição e em seguida se pergunte se a função é integrável em $[x_1,1]$.

Exercício 5 Encontre (se possível) exemplos para os casos abaixo:
a) uma função f tal que $\int_0^1 f = 0$ mas $f(x)\neq 0$ para todo $x\in[0,1]$;
b) uma função f tal que $\int_0^1 f > 0$ mas $f(x)<0$ para todo $x\in[0,0.9]$;
c) duas funções f,g tais que $\int_0^1 f = 1$, $\int_0^1 g = 1$ e $\int_0^1 fg = 0$;
d) uma função f tal que $\int_0^1 f = 0$ mas $\int_0^1 |f| = 1$.

Exercício 6 Sabe dizer, sem fazer contas, quanto vale a integral a seguir?

$$\int_{-4}^3 \sin(x)e^{-x^2}\,dx - \int_{-4}^{-3} \sin(x)e^{-x^2}\,dx$$

Exercício 7 Use um argumento geométrico para calcular $\int_0^6 \sqrt{36-x^2}\,dx$.

Exercícios sobre Teoremas da média e fundamental

Exercício 8 Nas integrais abaixo, verifique se pode ser aplicado o teorema da média integral (na sua versão para funções contínuas) e no caso encontre um ponto que satisfaça a tese do teorema ($[[u]]$ indica a parte inteira de u).
(**a**) $\displaystyle\int_3^6 (4x-1)dx,$ (**b**) $\displaystyle\int_{-2}^3 x^2\,dx,$ (**c**) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x^2}{1-x^2}\,dx,$ (**d**) $\displaystyle\int_{-2}^{2.5} [[u]]\,du.$

Exercício 9
a) Encontre um exemplo de uma função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ limitada, tal que existe $c\in(a,b)$ com a propriedade que $\int_0^1 f(x)dx = f(c)$.

b) Encontre um exemplo de uma função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitada, tal que não existe $c \in (a,b)$ com a propriedade $\int_0^1 g(x)dx = g(c)$.
c) Sejam agora $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ e $G(x) = \int_0^x g(t)dt$: elas são contínuas? elas são deriváveis? Justifique a resposta.

Exercício 10 Esboce o gráfico da função $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ quando f é uma das funções a seguir ($[[\,x\,]]$ é parte inteira de x)

$$a)\ \ f(x) = [[\,x\,]], \qquad b)\ \ f(x) = \begin{cases} x & x \le 5, \\ 0 & x \in (5,6]\ , \\ -3 & x > 6 \end{cases} \qquad c)\ \ f(x) = x - [[\,x\,]].$$

Exercício 11 Calcule as derivadas das funções a seguir (esclareça antes o domínio natural da função):

$$(a)\ \int_1^{\cos t} (t + \sin t)\ dt \qquad (b)\ \int_{e^x}^0 \sin^3(t)\ dt \qquad (c)\ \int_2^{1/x} \tan(s)\ ds \qquad (d)\ \int_x^{(e^x-1)} \frac{1}{x}\ dx$$

Exercício 12 (!) Sejam $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, infinitas vezes deriváveis, cujos polinômios de Taylor de grau 3 em 0 são, respectivamente, $T^3_{0,g} = 1 + x - x^2$ e $T^3_{0,h} = \pi x + 2x^2 + x^3$.
Calcule o polinômio de Taylor de grau 2 em 0 da função

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} e^{t^2} dt\ ,$$

e através dele esboçe o gráfico de F perto de 0.

Exercício 13 Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{\cos^2(t)}\ dt}{\sin(x)}$

Exercício 14 Calcule o polinômio de Taylor em 0, de ordem 3, das funções
$f(x) = \int_0^x e^{x^2}\,dx \qquad g(x) = \int_{x^2}^{\pi} \sin(x)\,dx$

Gabarito

Exercício 3 b) entre 0 e 45
Exercício 6 vale 0
Exercício 7 9π
Exercício 8 a) $p = 4.5$, b) $p = \pm\sqrt{7/3}$, c,d) não aplica
Exercício 11 c) $D = (2/\pi, 2/3\pi)$, $f' = -\tan(1/x)/x^2$; d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f' = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x}$.
Exercício 12 $-\int_0^1 e^{t^2} dt + (\pi - e)x + 2x^2$
Exercício 13 $\lim = e$
Exercício 14 para f: $x + 2x^3/6$, para g: $2 - x^4/2$.