Solução

Como, por hipótese, f é contínua em p, dado $\epsilon > 0$, existirá $\delta > 0$ tal que $\forall x \in D_f$

① $$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$$

Como *para todo* $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que ① ocorre, tomando-se, em particular, $\epsilon = f(p)$ (por hipótese $f(p) > 0$), existirá um $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - f(p) < f(x) < f(p) + f(p)$$

e, portanto,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$

De modo análogo, prova-se que se f for contínua em p e $f(p) < 0$, então (neste caso basta tomar $\epsilon = -f(p)$) existirá $\delta > 0$ tal que

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(x) < 0. \quad \blacksquare$$

Exercícios 3.2

1. Prove, pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado.

   a) $f(x) = 4x - 3$ em $p = 2$ *b)* $f(x) = x + 1$ em $p = 2$
   c) $f(x) = -3x$ em $p = 1$ *d)* $f(x) = x^3$ em $p = 2$
   e) $f(x) = x^4$ em $p = -1$ *f)* $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 4$
   g) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 0$ *h)* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $p = 1$

2. Prove que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua em todo $p \neq 0$.

3. Seja $n > 0$ um natural. Prove que $f(x) = x^n$ é contínua.

4. Prove que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua.

5. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua em 1? Justifique.

6. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua em todos os pontos, exceto em $-1, 0, 1$.

7. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua em todos os pontos exceto nos inteiros.

8. Seja f dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ Mostre que f é descontínua em todo p real.

9. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é contínua.

   a) $f(x) = [\![x]\!]$ onde $[\![x]\!] = \text{máx}\,\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ *(Função maior inteiro.)*

   b) $f(x) = x - [\![x]\!]$

   c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

10. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua apenas em $-1, 0, 1$.

11. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

    a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$

    b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $p = 0$

12. Dê o valor (caso exista) que a função dada deveria ter no ponto dado para ser contínua neste ponto. Justifique.

    a) $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ em $p = 2$

    b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ em $p = 0$

    c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ em $p = 0$

    d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 4 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$

    e) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $p = 1$

    f) $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ em $p = 2$

13. Sabe-se que f é contínua em 2 e que $f(2) = 8$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$
    $$2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow f(x) > 7.$$

14. Sabe-se que f é contínua em 1 e que $f(1) = 2$. Prove que existe $r > 0$ tal que para todo $x \in D_f$
    $$1 - r < x < 1 + r \Rightarrow \frac{3}{2} < f(x) < \frac{5}{2}.$$

15. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \leqslant M\,|x - p|$ para todo x. Prove que f é contínua em p.

16. Suponha que $|f(x) - f(1)| \leqslant (x - 1)^2$ para todo x. Prove que f é contínua em 1.

17. Suponha que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Prove que f é contínua em 0.

18. Prove que a função $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ é contínua em 0.

19. Sejam f e g definidas em $\mathbb{R}$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \leq M|g(x) - g(p)|$ para todo x. Prove que se g for contínua em p, então f também será contínua em p.

20. Suponha f definida e contínua em $\mathbb{R}$ e que $f(x) = 0$ para todo x racional. Prove que $f(x) = 0$ para todo x real.

21. Sejam f e g contínuas em $\mathbb{R}$ e tais que $f(x) = g(x)$ para todo x racional. Prove que $f(x) = g(x)$ para todo x real.

22. Suponha que f e g são contínuas em $\mathbb{R}$ e que exista $a > 0$, $a \neq 1$, tal que para todo r racional, $f(r) = a^r$ e $g(r) = a^r$. Prove que $f(x) = g(x)$ em $\mathbb{R}$.

23. Seja $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Prove

a) $|f(x) - f(1)| \leq \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)|x - 1|$ para $x > 0$

b) $|f(x) - f(1)| \leq 3|x - 1|$ para $x > \dfrac{1}{2}$

c) f é contínua em $p = 1$

24. Seja $f(x) = x^3 + x$. Prove que

a) $|f(x) - f(2)| \leq 20|x - 2|$ para $0 \leq x \leq 3$
b) f é contínua em 2

25. Prove que $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ é contínua em 1.

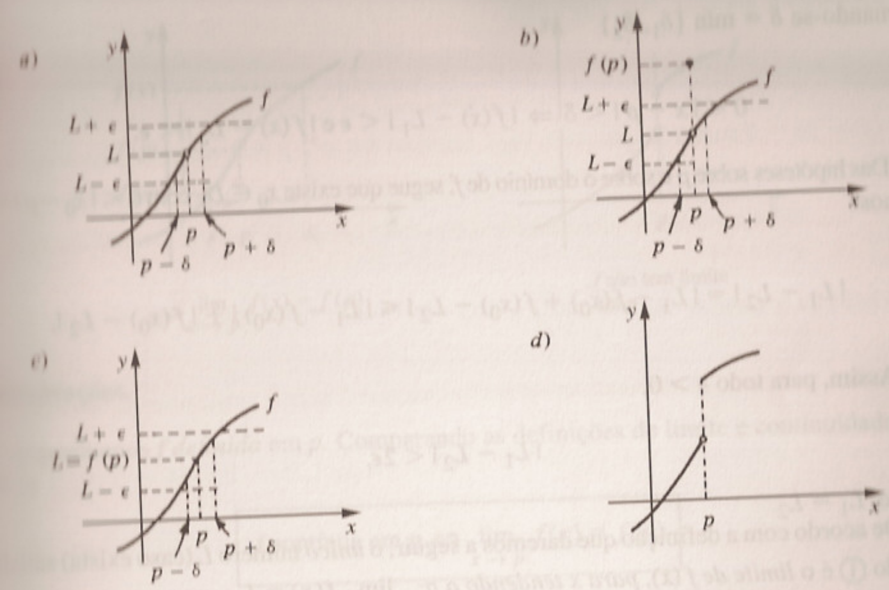
26. Prove que $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ é contínua em todo $p > 0$.

27. Sejam $f(x) = x^3$ e $p \neq 0$.

a) Verifique que $|x^3 - p^3| \leq 7p^2|x - p|$ para $|x| \leq 2|p|$
b) Conclua de (*a*) que f é contínua em p

3.3. Definição de Limite

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f (veja o final da Seção 3.1). Consideremos as situações a seguir:



Na situação (*a*), f não está definida em p, mas existe L que satisfaz a propriedade:

① para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$$

Na situação (*b*), f está definida em p, mas não é contínua em p, entretanto existe L satisfazendo ①; observe que neste caso a restrição $x \neq p$ é essencial. Na situação (*c*), f é contínua em p, assim $L = f(p)$ satisfaz ①. Finalmente, na situação (*d*), não existe L satisfazendo ① em p.

A propriedade ① é equivalente a

para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Observe que $0 < |x - p| < \delta \Leftrightarrow p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p$.

Vamos provar a seguir que existe no máximo um número L satisfazendo a propriedade acima. De fato, suponhamos que L_1 e L_2 satisfaçam, em p, a propriedade acima; então, para todo $\epsilon > 0$ dado, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon$$

$$0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon;$$