USP/ICMC/ DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primeira prova de SMA0354-Cálculo II.

Primeiro horário: 8:10h

1. (***1.a***)

$$V(b) = \int_4^b \pi f(x)^2 dx \Rightarrow \lim_{b\to+\infty} V(b) = \pi \lim_{b\to+\infty} \int_4^b \left(\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\right)^2 dx = \pi \lim_{b\to+\infty} \int_4^b \frac{1}{x\ln^2 x} dx =$$

$$= -\pi \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{\ln x}\right]_{x=4}^{x=b} = -\pi \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln b} - \frac{1}{\ln 4}\right) = \frac{\pi}{\ln 4}.$$

$$V(b) = \pi\left(\frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln b}\right)$$

onde

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int \frac{du}{u^2} = -u^{-1} + C = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Com $u = ln(x)$.

(***1.b***) Calcule

$$\lim_{b\to+\infty} A(b).$$

Temos que

$$\lim_{b\to+\infty} A(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_4^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} dx = \int_4^{+\infty} 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

$$\frac{2\pi}{x} \le 2\pi f(x) \le 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}.$$

Então podemos usar o critério de comparação de integrais impróprias do primeiro tipo ou seja, visto que $\frac{2\pi}{x}$ e $2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}$ são positivas no intervalo de integração, se

$$\int_4^\infty \frac{2\pi}{x} dx$$

divergir, então

$$\int_4^\infty 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

também diverge.

Como

$$\int_4^\infty \frac{2\pi}{x} dx = 2\pi \int_4^\infty \frac{dx}{x} = 2\pi \lim_{n\to+\infty} [\ln x]_4^n = 2\pi \lim_{n\to+\infty} (\ln(n) - \ln(4) = +\infty$$

Concluímos que

$$\int_4^\infty 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} dx = +\infty$$

(***2.a***) Calcule

$$\int_0^2 \sqrt{2-x}dx$$

Resolvemos o integral definido acima usando a substituição $u = 2 - x$, dai que $du = -dx$.

$$u = 2 - x \Rightarrow u(0) = 2,\ u(2) = 0$$

$$\int_0^2 \sqrt{u}du = \int_0^2 u^{\frac{1}{2}}du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=0}^{u=2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

(***2.b***) Calcule

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+4)}dx$$

Vamos decompôr o integrando em fracções simples, isto é,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+4)}$$

Temos duas fracções com o mesmo denominador e, como elas são iguais, significa que os numeradores são iguais. Assim, temos a igualdade

$$Ax^2 + 4A + Bx^2 + Bx + Cx + C = (A+B)x^2 + (B+C)x + 4A + C = 1$$

Dois polinómios são iguais se os coeficientes ligados às partes literais do mesmo grau coincidem. Portanto,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ 4A + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/5 \\ B = -1/5 \\ C = 1/5 \end{cases}$$

Voltando ao nosso integral podemos escrevê-lo na forma

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+4)}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{(-\frac{1}{5}x + \frac{1}{5})}{x^2+4}\right)dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+4} - \frac{1}{5}\int \frac{xdx}{x^2+4} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{1}{10}\arctan\frac{x}{2} - \frac{1}{10}\ln|x^2+4| + C$$

- Na primeira integral faça a substituição $u = x + 1$.
- Na segunda integral transforme $x^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right)$ e faça $u = \frac{x}{2}$.
- Na terceira integral faça a substituição $u = x^2 + 4$.

(2.c) Calcule:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^3}^{\ln(x^2+1)} \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}dt\right)$$

Usando o teorema abaixo:

Teorema 1 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$. Consideremos a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad para \quad x \in [a,b]$$

Então a função F será diferenciável em [a , b] e, além disso, teremos

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\right] = f(x) \quad para\ cada\ x \in [a,b].$$

Para o exercício consideramos

$$F(x) = \int_{x^3}^{\ln(x^2+1)} \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}dt$$

e calcularemos $F'(x)$.

Considerando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como f é contínua então será integrável em qualquer intervalo fechado e limitado contido em $\mathbb{R}$. Então a função $F(x)$ está bem definida, além disso,

$$F(x) = \int_{x^3}^{\ln(x^2+1)} \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}dt = \int_{x^3}^{0} \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}dt + \int_{0}^{\ln(x^2+1)} \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}dt =$$

$$-\int_{0}^{x^3} \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}dt + \int_{0}^{\ln(x^2+1)} \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}dt$$

Se consideramos

$$F_1(x) = -\int_{0}^{x^3} \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}dt$$

e

$$F_2(x) = \int_{0}^{\ln(x^2+1)} \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}dt$$

Teremos que $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ e então $F'(x) = F_1'(x) + F_2'(x)$.

Notemos que a função $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_1(x) = x^3, \ x \in \mathbb{R}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$g_1'(x) = 3x^2, \ x \in \mathbb{R}$$

. Notamos ainda que pelo teorema 1, temos que uma função $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F_1(g_1) = \int_0^{g_1} f(t)dt, \quad g_1 \in \mathbb{R}$$

é diferenciável.

Assim usando a regra de cadeia,

$$F_1(x) = F_1(g_1(x))$$

e a sua derivada

$$F_1'(x) = [F_1(g_1(x))]' = g_1'(x)F_1'(g_1) = -3x^2\frac{\sqrt{2+cos(x^3)}}{x^{12}+1}$$

. Com o mesmo raciocino considera-se $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_2(x) = \ln(x^2+1),\ x \in \mathbb{R}$$

que é também diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$g_2'(x) = \frac{2x}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim usando a regra de cadeia,

$$F_2(x) = F_1(g_2(x))$$

e a sua derivada

$$F_2'(x) = [F_2(g_2(x))]' = g_2'(x)F_2'(g_2) = \frac{2x}{x^2+1}\frac{\sqrt{2+cos(\ln(x^2+1))}}{\ln^4(x^2+1)+1}.$$

Concluindo

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^3}^{\ln(x^2+1)} \frac{\sqrt{2+\cos(t)}}{t^4+1}dt\right) = F_1'(x) + F_2'(x) = -3x^2\frac{\sqrt{2+cos(x^3)}}{x^{12}+1} + \frac{2x}{x^2+1}\frac{\sqrt{2+cos(\ln(x^2+1))}}{\ln^4(x^2+1)+1}.$$

(*3*) A area da região mostrada ao lado é dada por

$$A = \int_0^{\pi} x\sin(x)dx$$

Para calcular o valor da integral definida acima, encontraremos uma das primitivas usando o método de integração por partes e usamos o teorema fundamental do cálculo.

De forma abreviada escrevemos

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Seja

$$\left\{\begin{array}{r} u = x \\ \\ dv = sin(x)dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} du = dx \\ \\ v = -\cos(x) \end{array}\right. \Rightarrow \int xsin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = \sin(x) - x\cos(x) + C$$

Dai que

$$A = [\sin(x) - x\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} = \pi.$$