USP/ICMC/ DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Primeira prova de SMA0354-Cálculo II.

Segundo horário: 10:10h

(***1.a***) Calcule

$$\int_0^1 \frac{x^3}{2+x^4}dx$$

Fazendo a substituição $u = 2 + x^4$, temos $du = 4x^3 \Rightarrow x^3dx = \dfrac{du}{4}$, e ainda $u(0) = 2$, e $u(1) = 3$. E rescrevemos o integral como:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{2+x^4}dx \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_2^3 \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\left[\ln u\right]_{u=2}^{u=3} = \frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 2.)$$

(***1.b***) Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\int_0^x \sin(u^3)du}$$

Escrevemos o limite acima como:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

onde $f(x) = x^4$ e $g(x) = \int_0^x \sin(u^3)du$, f é polinomial então será diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 4x^3$. A função g é diferencial pelo teorema **??**, e ainda:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x \sin(u^3)du\right] = \sin(x^3).$$

Nestas condições pode-se usar a regra de L'Hospital para calcular o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{\sin(x^3)} = 4\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin(x^3)} = 4\lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin(u)} = 4$$

onde $u = x^3$ e $u \to 0$ quando $x \to 0$.

(***1.c***) Calcule

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$$

Seja $x = 2\sin\theta$; então $dx = 2\cos\theta d\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$, logo:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{2\cos\theta d\theta}{2^3\sin^2\theta\cos\theta} = \frac{1}{4}\int cosc^2\theta d\theta = -\frac{1}{4}cotg\theta + C =$$

Como $x = 2\sin(\theta) \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx = -\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$$

(*2*) A área da região mostrada é calculada como:

$$A=\int_{-1}^{1}|x^2-(3x^2-2)|dx=\int_{-1}^{1}(2x^2-2)dx=\left[\frac{2x^3}{3}-2x\right]_{x=-1}^{x=1}=\frac{8}{3}$$

(*3a*) Para transformar este integral na forma desejada, fazemos a mudança de variável $t^3=x$, e então $dx=3t^2dt$, então:

$$I=\int e^{-\sqrt[3]{x}}dx=3\int t^2e^{-t}dt$$

(*3b*)
Resolvemos usando o método de integração por partes

$$\left\{\begin{array}{c} u=t^2 \\ \\ dv=e^{-t} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} du=2tdt \\ \\ v=-e^{-t} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$I=-3t^2e^{-t}+6\int te^{-t}dt$$

Resolvemos $I_1=\int te^{-t}dt$ também usando o mesmo método

$$\left\{\begin{array}{c} u=t \\ \\ dv=e^{-t} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} du=dt \\ \\ v=-e^{-t} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$I_1=-te^{-t}+\int e^{-t}dt=-te^{-t}-e^{-t}+C,$$

logo

$$I=-t^2e^{-t}-6te^{-t}-6e^{-t}+C=-e^{-t}(3t^2+6t+6)+C$$

(*3c*) Explicitamente a área é calculada como

$$A(R)=\int_0^R e^{-\sqrt[3]{x}}dx=3\int_0^{\sqrt[3]{R}}t^2e^{-t}=\left[-e^{-t}(3t^2+6t+6)\right]_{t=0}^{t=\sqrt[3]{R}}=-e^{-\sqrt[3]{R}}(3\sqrt[3]{R}^2+6\sqrt[3]{R}+6)+6$$

(*3d*) Calcule

$$\lim_{R\to+\infty}A(R).$$

$$\lim_{R\to+\infty}A(R)=\lim_{R\to+\infty}\left[-e^{-\sqrt[3]{R}}(3\sqrt[3]{R}^2+6\sqrt[3]{R}+6)+6\right]=\lim_{R\to+\infty}\left[-e^{-\sqrt[3]{R}}(3\sqrt[3]{R}^2+6\sqrt[3]{R})+6\right]$$

Mas o limite

$$\lim_{R\to+\infty}\left[-e^{-\sqrt[3]{R}}(3\sqrt[3]{R}^2+6\sqrt[3]{R})+6\right]=-\lim_{R\to+\infty}\left[\frac{(3\sqrt[3]{R}^2+6\sqrt[3]{R})}{e^{\sqrt[3]{R}}}+6\right]=\frac{+\infty}{+\infty}$$

Pode ser resolvido pela regra de L'Hospital, ficando

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\frac{(3\sqrt[3]{R}^2+6\sqrt[3]{R})}{e^{\sqrt[3]{R}}}+6\right]=\lim_{R\to+\infty}\frac{2R^{-\frac{1}{3}}+2R^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}R^{-\frac{2}{3}}e^{\sqrt[3]{R}}}=\lim_{R\to+\infty}\frac{R^{-\frac{2}{3}}\left(2+2R^{\frac{1}{3}}\right)}{\frac{1}{3}R^{-\frac{2}{3}}e^{\sqrt[3]{R}}}=\lim_{R\to+\infty}\frac{\left(2+2R^{\frac{1}{3}}\right)}{\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{R}}}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

Aplicando a regra de L'Hospital novamente, teremos:

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\left(2+2R^{\frac{1}{3}}\right)'}{\left(\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{R}}\right)'}=\lim_{R\to+\infty}\frac{\frac{2}{3}R^{-\frac{2}{3}}}{\dfrac{1}{9}R^{-\frac{2}{3}}e^{\sqrt[3]{R}}}=\lim_{R\to+\infty}\frac{2}{\dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{R}}}=0$$

Portanto

$$\lim_{R\to+\infty}A(R)=6.$$

Conclui-se que a áreia sob o gráfico de $f(x)$, para $x\in[0,+\infty[$ é finita.