Segunda prova de SMA0354-Cálculo II

Questão 1 (a) Calcule, caso exista, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2xy^2}{x^2 + y^2}$. Se não existir, justifique.

(b) Considere a função $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$.

(b1) Encontre o domínio de f e faça um esboço do domínio.

(b2) Faça um esboço das curvas de níveis $0, 1$ e 2 de f.

(b3) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, \frac{1}{2})$ na direção $(1, 2)$.

Questão 2 Encontre os valores máximo e mínimo de

$$f(x, y, z) = x - 2y + 5z$$

sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

Questão 3 (a) Mostre que, se $f(u, v)$ satisfaz a equação de Laplace $f_{uu} + f_{vv} = 0$ e se $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ e $v(x, y) = xy$, então $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ satisfaz a equação de Laplace $F_{xx} + F_{yy} = 0$.

(b) Encontre as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x, y) = x^2y^3 - 2xy$ no ponto $P = (2, -1, 0)$.

Questão 4 Seja $f(x, y) = e^x \cos(y)$.

(a) Encontre o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $(0, 0)$. Chame este polinômio de $P(x, y)$.

(b) Forneça uma estimativa (valor numérico) para o erro cometido ao aproximar $f(x, y)$ por $P(x, y)$ na região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 0.1 \quad \text{e} \quad |y| \leq 0.1\}$, isto é, estime $|f(x, y) - P(x, y)|$ para $(x, y) \in R$.

Horário 8:10 às 10:10

1. (***1.a*****)**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

Escrevemos $\lim_{P\to P_0} f(x, y) = L$, onde $P_0 = (0, 0)$ e $f(x, y) = \frac{x^3 - 2xy^2}{x^2 + y^2}$. Dai que podemos reescrever $f(x, y)$ da seguinte forma:

$$f(x, y) = \frac{x^3 - 2xy^2}{x^2 + y^2} = x\frac{x^2}{x^2 + y^2} - 2x\frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

e

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\frac{x^2}{x^2 + y^2} - 2x\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right),$$

visto que $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ e $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ são funções limitadas (mostre!)

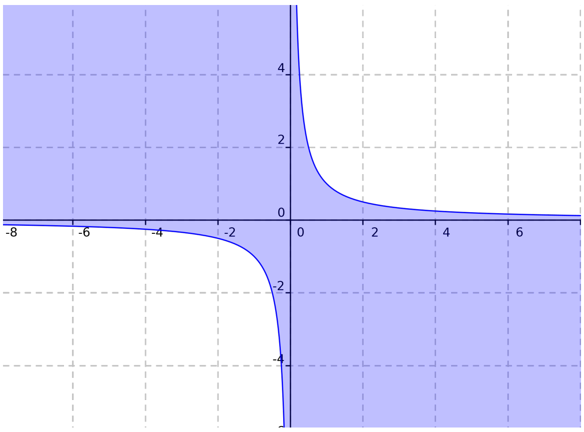
$$\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1 \quad \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1, \ \forall (x,y) \neq (0,0),$$

então você pode aplicar o teorema do confronto e concluir que $L = 0$.

1. (*b1*)

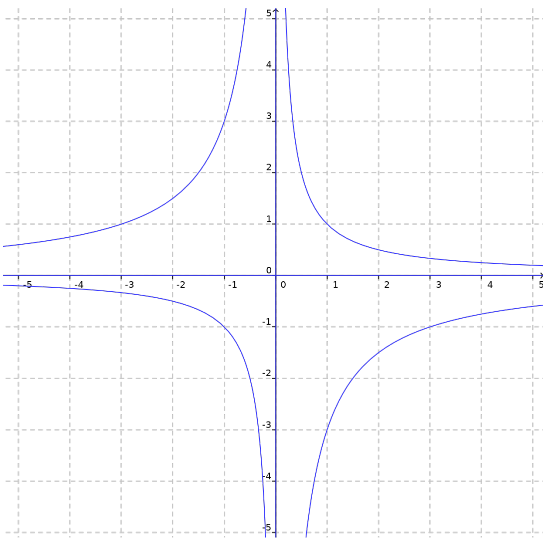
$$Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ \ 1 - xy \geq 0\right\}$$

Esboço



1. (*b2*)

Curvas de nível $\sqrt{1-xy} = k$. Resolva para os níveis $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$. Coloque os níveis respectivos no desenho abaixo.



1. (*b3*) Temos que a derivada direcional de f no ponto P na direção unitária $\mathbf{u}$ é dada por:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \langle \nabla f(P), \mathbf{u} \rangle$$

dada a direção pedida $\mathbf{v} = (1,2) \Longrightarrow \mathbf{u} = \dfrac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, e $\nabla f = (f_x, f_y)$, então:

$$\nabla f(P) = \left(\frac{-y}{2\sqrt{1-xy}}, \frac{-x}{2\sqrt{1-xy}}\right)_{P=(1,\frac{1}{2})} = \left(\frac{-\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}, \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$$

Portanto

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \langle \nabla f(P), \mathbf{u} \rangle = \frac{-\sqrt{5}}{20\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

2.

Considera-se o método de Lagrange para encontrar os valores máximos e mínimos de $f(x,y,z) = x - 2y + 5z$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

Considere $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Resolve-se primeiramente o sistema $\lambda \nabla f(x,y,z) = \nabla g(x,y,z),\ g(x,y,z) = 30$:

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

e

$$\nabla f(x,y,z) = (1, -2, 5)$$

Logo:

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = -2\lambda \\ 2z = 5\lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{2} \\ y = -\lambda \\ z = \dfrac{5\lambda}{2}\lambda \\ \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 + (-\lambda)^2 + \left(\dfrac{5\lambda}{2}\right)^2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ -- \\ -- \\ \lambda = \pm 2 \end{cases}$$

Solução do sistema é:

$$\lambda = 2,\ x = 1,\ y = -2,\ z = 5$$

e

$$\lambda = -2,\ x = -1,\ y = 2,\ z = -5$$

como f é contínua e a esfera é um conjunto compacto, os pontos de máximos e mínimos absolutos de f estão entre os pontos encostrados na solução do sistema:

$$f(1, -2, 5) = 30$$

Máximo global

$$f(-1, 2, -5) = -30$$

Mínimo global

3.a

Para resolver este exercício podemos usar a regra de cadeia, temos que:

$$F_x(x, y) = f_x(u, v) = f_u(u, v)u_x f_v(u, v)v_x = f_u(u, v)(x) + f_v(u, v)(y)$$

e

$$F_y(x, y) = f_y(u, v) = f_u(u, v)u_y f_v(u, v)v_y = f_u(u, v)(y)(-y) + f_v(u, v)(x).$$

E ainda:

$$F_{xx}(x, y) = (f_{uu}(u, v)u_x + f_{uv}(u, v)v_x)x + f_u(u, v) + (f_{vu}(u, v)u_x + f_{vv}(u, v)v_x)(y)$$

e

$$F_{yy}(x, y) = (f_{uu}(u, v)u_y + f_{uv}(u, v)v_y)(-y) - f_u(u, v) + (f_{vu}(u, v)u_y + f_{vv}(u, v)v_y)(x).$$

Logo

$$F_{xx}(x, y) = (f_{uu}(u, v)x + f_{uv}(u, v)y)x + f_u(u, v) + (f_{vu}(u, v)x + f_{vv}(u, v)y)(y) \tag{1}$$

e

$$F_{yy}(x, y) = (f_{uu}(u, v)(-y) + f_{uv}(u, v)x)(-y) - f_u(u, v) + (f_{vu}(u, v)(-y) + f_{vv}(u, v)x)(x), \tag{2}$$

somando as equações 1 e 2:

$$F_{xx}(x, y) + F_{yy}(x, y) = x^2 f_{uu} + y^2 f_{vv} + y^2 f_{uu} + x^2 f_{vv} = x^2(f_{uu} + f_{vv}) + y^2(f_{uu} + f_{vv}) = 0$$

4.b

O plano tangente a f no ponto $P = (x_0, y_0, z_0) = (2, -1, 0)$ é dado por $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$. Sendo

$$f_x = 2xy^3 - 2y \Longrightarrow f_x(2, -1) = -2$$

e

$$f_y = 3x^2y^2 - 2x \Longrightarrow f_y(2, -1) = 8,$$

então o plano tangente em P é

$$z - 0 = f_x(x_0, y_0)(x - 2) + f_x(x_0, y_0)(y + 1) \Leftrightarrow z = -2x + 8y + 12$$

e a reta normal tem a direção $\mathbf{n} = (-2, 8, -1)$ e será

$$(x,y,z) = (2,-1,0) + \lambda(-2,8,-1)$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.a

O polinômio de Taylor de grau 1 de f no ponto $M = (x_0, y_0)$ é dado por:

$$P(x,y) = f(M) + f_x(M)(x - x_0) + +f_y(M)(y - y_0)$$

Sendo

$$f_x = e^x \cos y \Longrightarrow f_x(M) = 1$$

$$f_y = -e^x \sin y \Longrightarrow f_y(M) = 0.$$

Portanto

$$P(x,y) = 1 + x$$

4.b

Sendo $f(x,y) = P(x,y) + E(x,y)$, o erro pode se estimado por:

$$E(h,k) = \frac{1}{2}\left[f_{xx}(\bar{x},\bar{y})h^2 + 2f_{xy}(\bar{x},\bar{y})hk + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})k^2\right]$$

Sendo

$$x - x_0 = h \ e \ x - y_0 = k$$

Temos que:

$$f_{xx} = e^x \cos y,$$

$$f_{xy} = -e^x \sin y$$

e

$$f_{yy} = -e^x \cos y.$$

Portanto

$$E(h,k) = \frac{1}{2}\left[h^2 e^{\bar{x}} \cos \bar{y} - 2hke^{\bar{x}} \sin \bar{y} - k^2 e^{\bar{x}} \cos \bar{y}\right]$$

$$E(x,y) = \frac{1}{2}\left[x^2 e^{\bar{x}} \underbrace{\cos \bar{y}}_{\leq 1} - 2xye^{\bar{x}} \underbrace{\sin \bar{y}}_{\leq 1} - y^2 e^{\bar{x}} \cos \underbrace{\cos \bar{y}}_{\leq 1}\right] \Longrightarrow$$

$$E(x,y) \leq e^{0.1}\left(e^{0.1}(0.1)^2 + 2(0.1)^2 e^{0.1} + (0.1)^2 e^{0.1}\right)$$