USP/ICMC/ DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
**Segunda prova de SMA0354-Cálculo II**

**Questão 1** (a) Calcule, caso exista, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y - xy^4}{x^5 - y^5}$. Se não existir, justifique.

(b) Considere a função $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$.

(b1) Encontre o domínio de $f$ e faça um esboço do domínio.

(b2) Faça um esboço das curvas de níveis $-1, 0$ e $1$ de $f$.

(b3) Calcule a derivada direcional de $f$ no ponto $(1,1)$ na direção $(-1,2)$.

**Questão 2** Considere a função $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$.
Encontre e classifique (mínimo local, máximo local ou ponto de sela) todos os pontos críticos de $f$.

**Questão 3** (a) Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável de uma variável real e defina $g(x,y) = \psi(x/y)$. Verifique que

$$xg_x(x,y) + yg_y(x,y) = 0 \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y \neq 0.$$

(b) Encontre as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ no ponto $P = (1,1,5)$.

**Questão 4** Seja $f(x,y) = 1 + y + x\cos(y)$.

(a) Encontre o polinômio de Taylor de ordem 1 de $f$ no ponto $(0,0)$. Chame este polinômio de $P(x,y)$.

(b) Forneça uma estimativa (valor numérico) para o erro cometido ao aproximar $f(x,y)$ por $P(x,y)$ na região $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 0.2 \text{ e } |y| \leq 0.2\}$, isto é, estime $|f(x,y) - P(x,y)|$ para $(x,y) \in R$.

## Horário das 10:10 às 11:50

**1. ( *1.a*)**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y - xy^4}{x^5 - y^5}$$

Escrevemos $\lim_{P\to P_0} f(x,y) = L$ (se existir!), onde $P_0 = (0,0)$ e $f(x,y) = \frac{x^4y - xy^4}{x^5 - y^5}$. Logo:

- Se nos aproximarmos de $P_0$ pela família de retas que passam pela origem: $y = kx$ com $k \neq 0$ (justifique por que k deve ser não nulo!)

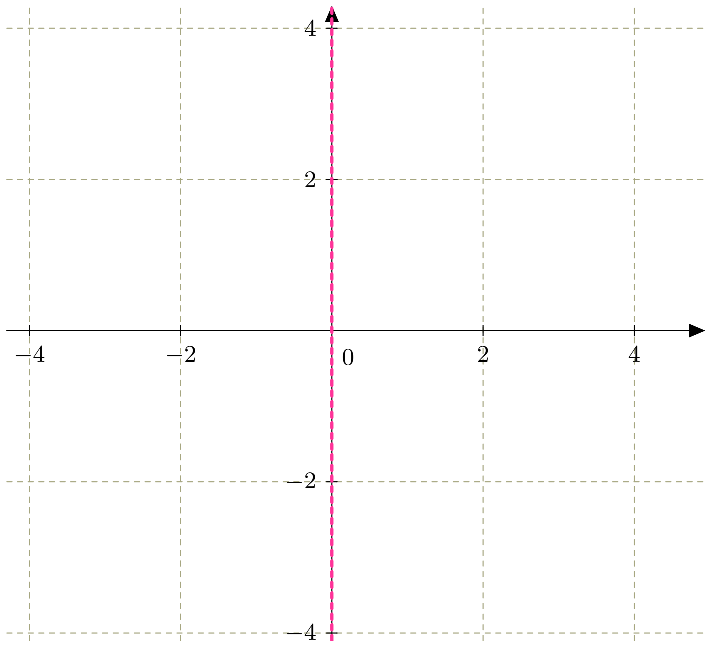
Teremos: $f$ calculada para $y = kx$ é $f(x,kx) = \frac{kx^5 - k^4x^5}{x^5 - k^5x^5} = \frac{k - k^4}{1 - k^5}$

FAzendo o limite nestes caminhos temos que limites com valores distintos para diferentes valores de $k$ conclui-se que o limite não existe.

**1. ( *b1*)**

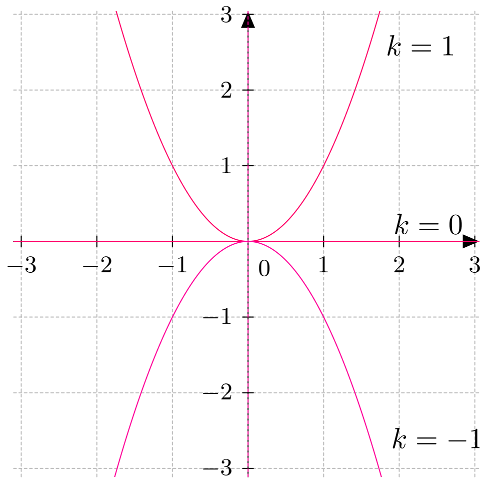
$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x \neq 0\}$$

**Esboço: todo o plano menos o eixo y**




**1. ( *b2*)**

Curvas de nível $\frac{y}{x^2} = k$. Faça as continhas dos níveis $k = -1, k = 0, k = 1$. No desenho abaixo deve-se retirar o ponto $(0, 0)$. Justifique isso.




**1. ( *b3*)**

Temos que a derivada direcional de $f$ na direção unitária $\mathbf{u}$ é dada por:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \langle \nabla f(P), \mathbf{u} \rangle$$

dada a direção pedida $\mathbf{v} = (-1, 2) \Longrightarrow \mathbf{u} = \dfrac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$$\nabla f(P) = \left(\frac{-2y}{x^3}(P), \frac{1}{x^2}(P)\right) = (-2, 1)$$

Então

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \langle \nabla f(P), \mathbf{u} \rangle = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

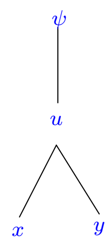
**2.** Pontos criticos:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 2y - 5 = 0 \\ \\ f_y = 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ---- \\ \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \\ y = 1 \end{cases}$$

Conclui-se que os pontos criticos são:
$P_1 = (-1, 1)$ e $P_2 = (\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})$. Temos que $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 12x - 4$

- Para $P_1$ temos que $D < 0$ então $P_1$ é ponto de sela.
- Para $P_2$ temos que $D > 0$ e $f_{xx}(P) > 0$ então $P_2$ é ponto de mínimo.

**3. a)**
Seja $u = \dfrac{x}{y}$, $g(x, y) = \psi(u)$, ou seja




Logo:

$$g_x = \psi_u u_x = \frac{\psi_u}{y}$$

$$g_y = \psi_u u_y = \frac{-x\psi_u}{y^2}$$

E

$$xg_x(x, y) + yg_y(x, y) = x\frac{\psi_u}{y} + y\frac{-x\psi_u}{y^2} = 0$$

**3. b)**

O plano tangente a $f$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dado por $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.
Sendo

$$f_x = 2x + 3y \Longrightarrow f_x(x_0, y_0) = 5$$

e

$$f_y = 3x + 2y \Longrightarrow f_y(x_0, y_0) = 5,$$

então o plano tangente em P é

$$z - 5 - 5(x-1) - 5(y-1) = 0$$

e a reta normal tem a direção $\mathbf{n} = (5, 5, -1)$ e será

$$(x, y, z) = (1, 1, 5) + \lambda(5, 5, -1)$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$.

**4.a**

O polinômio de Taylor de grau 1 de f no ponto $M = (x_0, y_0)$ é dado por:

$$P(x, y) = f(M) + f_x(M)(x - x_0) + +f_y(M)(y - y_0)$$

Sendo

$$f_x = \cos y \Longrightarrow f_x(M) = 1$$

$$f_y = 1 + x \sin y \Longrightarrow f_y(M) = 1.$$

Portanto

$$P(x, y) = 1 + x + y$$

**4.b**

$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = f_{yx} = -\sin y, \quad f_{yy} = -x \cos y$$

$$|f(x, y) - P(x, y)| = |E(x, y)| = \frac{1}{2}|0x^2 - 2\sin(b)xy - a\cos(b)y^2| \leq \frac{1}{2}(2|x||y| + y^2) \quad (a, b) \in R$$

Portanto se $(a, b) \in R$ então $|a|, |b| \leq 0.2$ e

$$|f(x, y) - P(x, y)| \leq \frac{1}{2}(2(0.2)(0.2) + 0.2(0.2)^2)$$