Interpolação no círculo usando funções condicionalmente negativas definidas

Ana Paula Peron

Orientador: Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Ciências - Área: Matemática".

USP - São Carlos
1995

À minha família

Agradecimentos [1]

Ao professor Valdir Antonio Menegatto pela orientação, dedicação, paciência e amizade no decorrer do desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais Valdecir e Maria de Lourdes, minha irmã Kátia e sobrinha Inajá, pelo carinho, amor e compreensão.

Às secretárias Laura e Beth pela simpatia, atenção e eficiência com que sempre me atenderam.

Aos meus amigos que me proporcionaram momentos alegres e que me deram apoio em momentos difíceis neste período, em especial: Cristina, Patrícia e Angelo.

Enfim, agradeço a todos que direta, ou indiretamente, cooperaram para a realização deste trabalho.

[1] Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq.

Abstract

We systematically study conditionally negative definite functions on the circle. When such functions are, in addition, strictly conditionally negative definite, then they can be employed to generate solutions of certain interpolation problems to arbitrary data on the circle. Separated necessary and sufficient conditions for strict conditional negative definiteness are presented. The possible use of conditionally negative definite functions to interpolate arbitrary data on a subset of the circle, not containing pairs of antipodal points, is studied. Finally, the particular case when the function is the identity itself is analysed.

Resumo

Estudamos, sistematicamente, funções condicionalmente negativas definidas sobre o círculo. Quando tais funções são também estritamente condicionalmente negativas definidas, então elas podem ser utilizadas em soluções de certos problemas de interpolação de dados arbitrários sobre pontos do círculo. Condições necessárias e condições suficientes para condicionalidade estrita negativa definida são apresentadas. A utilização de funções condicionalmente negativas definidas para interpolar dados sobre um subconjunto do círculo que não contém pares de pontos antipodais é então estudada. O caso particular em que a função coincide com a identidade é analisado sob essa perspectiva.

Sumário

Introdução

O problema de interpolação em S^1 pode ser descrito da seguinte forma: dados n pontos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em S^1 e escalares reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, deseja-se encontrar uma função $F : S^1 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x_j) = \lambda_j,\ 1 \leq j \leq n$. A versão discutida nesse trabalho consiste em buscar soluções da forma

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j g(d_1(x, x_j)), \qquad x \in S^1,$$

onde g é uma função previamente selecionada e d_1 é a distância geodésica em S^1. Quando as condições de interpolação são impostas, obtemos um sistema linear linear de n equações a n incógnitas $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, cuja matriz é

$$(g(d_1(x_i, x_j)))\,.$$

Tal matriz é denominada matriz de interpolação. Escolheremos a função g de modo que todos os autovalores das matrizes de interpolação (com uma possível excessão) tenham o mesmo sinal.

No Capítulo 1, apresentamos as classes de funções a serem utilizadas e estudamos a invertibilidade de matrizes quase não positivas definidas, uma vez que (possivelmente, a menos de sinal) todas as matrizes de interpolação são desse tipo.

No Capítulo 2, obtemos, separadamente, condições suficientes e necessárias para que uma função g, como definida no Capítulo 1, possa ser utilizada para construir soluções do problema de interpolação, independentemente da quantidade de pontos a serem interpolados.

No último capítulo, estudamos o problema de interpolação quando não existem pontos antipodais entre os pontos a serem interpolados. Uma discussão completa no caso em que $g(t) = t$ é apresentada.

Capítulo 1

Preliminares

Definição 1.1 Dizemos que uma matriz real $A = (A_{ij})$ de ordem n é *não negativa definida* se

$$c^t Ac := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j A_{ij} \geq 0,$$

para todo vetor coluna c com coordenadas reais $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Se a desigualdade acima é estrita quando c é não nulo, dizemos que a matriz A é *positiva definida.*

Definição 1.2 Seja (X, d) um espaço quase-métrico. Dizemos que uma função contínua $f : \{d(x, y) : x, y \in X\} \to \mathbb{R}$ é *positiva definida de ordem* n ($n \geq 1$) em X se para cada conjunto de n pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, a matriz A de ordem n com entradas $A_{ij} = f(d(x_i, x_j))$ é não negativa definida. Se a matriz A é positiva definida sempre que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são distintos, dizemos que f é *estritamente positiva definida de ordem* n em X. Se f é (estritamente) positiva definida de todas as ordens, então f é *(estritamente) positiva definida* em X.

Definição 1.3 Dizemos que uma matriz real A de ordem n é *quase não positiva definida* se A é simétrica e

$$c^t Ac \leq 0,$$

para $c \in \mathbb{R}^n$ com $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$. Se a desigualdade acima é estrita quando c é não nulo e $n \geq 2$, dizemos que a matriz A é *quase negativa definida.*

Definição 1.4 Seja (X, d) um espaço quase-métrico. Dizemos que uma função contínua $g : \{d(x, y) : x, y \in X\} \to \mathbb{R}$ é *condicionalmente negativa definida de ordem* n $(n \geq 1)$ em X se para cada conjunto de n pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, a matriz A de ordem n com entradas $A_{ij} = g(d(x_i, x_j))$ é quase não positiva definida. Se a matriz A é quase negativa definida quando $n \geq 2$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são distintos, dizemos que g é *estritamente condicionalmente negativa definida de ordem* n em X. Se g é (estritamente) condicionalmente negativa definida de todas as ordens, então g é *(estritamente) condicionalmente negativa definida* em X.

Observamos que se f é uma função (estritamente) positiva definida em S^1, então $c - f$ é (estritamente) condicionalmente negativa definida em S^1 qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$. Embora as noções de função (estritamente) positiva definida e de função (estritamente) condicionalmente negativa definida aplicam-se a espaços quase-métricos, estaremos interessados somente no caso em que X é o círculo unitário S^1 em $\mathbb{R}^2$ e d é a distância geodésica d_1 em S^1, isto é,

$$d_1(x, y) = \arccos\langle x, y\rangle, \qquad x, y \in S^1,$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. As funções positivas definidas em S^1 foram caracterizadas por I. J. Schoenberg [S] da seguinte maneira:

Lema 1.1 *Uma função contínua* $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *é positiva definida em* S^1 *se, e somente se,* f *é uma série da forma*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt,$$

onde $a_k \geq 0$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$.

Para obtermos uma caracterização similar para funções condicionalmente negativas definidas, precisamos dos resultados a seguir.

Lema 1.2 *Seja (X, d) um espaço quase-métrico. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) A função $t \to t^2$ é condicionalmente negativa definida em X;
(ii) Existe uma função $\phi : X \to l^2(\mathbb{N})$ tal que $d(x, y) = ||\phi(x) - \phi(y)||_2$, $x, y \in X$, ou equivalentemente, (X, d) é "isometricamente mergulhável"em $l^2(\mathbb{N})$. Aqui, $|| \ ||_2$ é a norma usual em $l^2(\mathbb{N})$.

Prova. p. 10 em [WW]. ■

Lema 1.3 *Seja $f : [0, \pi] \to [0, \infty)$ uma função contínua anulando-se em zero. O espaço quase-métrico $(X, f \circ d)$ é isometricamente mergulhável em $l^2(\mathbb{N})$ se, e somente se, f^2 é uma série da forma*

$$f^2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(1 - \cos kt),$$

onde $a_k \geq 0$, e $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$.

Prova. Teorema 3 em [Bo]. ■

Teorema 1.1 *Uma função contínua $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ é condicionalmente negativa definida em S^1 se, e somente se, g é uma série da forma*

$$g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(1 - \cos kt),$$

onde $a_k \geq 0$ e $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$.

Prova. Se g é condicionalmente negativa definida em S^1, então $g(t) \geq g(0)$ para todo $t \in [0, \pi]$. Logo, $f := g - g(0)$ é condicionalmente negativa definida em S^1, $f(0) = 0$ e $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, \pi]$. Equivalentemente, a função $t \to t^2$ é condicionalmente negativa definida no espaço quase-métrico $(S^1, \sqrt{f} \circ d_1)$. Pelo Lema 1.2, $(S^1, \sqrt{f} \circ d_1)$ é isometricamente mergulhável em $l^2(\mathbb{N})$. Assim, pelo Lema 1.3,

$$f(t) = (\ \sqrt{f(t)} \ )^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(1 - \cos kt),$$

com $a_k \geq 0$ e $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$. Portanto, g tem a forma desejada. Reciprocamente, suponhamos que g seja uma série como no enunciado do teorema. Como $h := g - g(0)$ satisfaz $h(0) = 0$ e $h(t) \geq 0$, $t \in [0, \pi]$, então, pelo Lema 1.3, o espaço quase-métrico $(S^1, \sqrt{h} \circ d_1)$ é isometricamente mergulhável em $l^2(\mathbb{N})$. Pelo Lema 1.2, $t \to t^2$ é condicionalmente negativa definida em $(S^1, \sqrt{h} \circ d_1)$. Equivalentemente, h é condicionalmente negativa definida em S^1. Portanto, $g = h + g(0)$ é condicionalmente negativa definida em S^1. ∎

Exemplo 1 A função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = t$ é condicionalmente negativa definida, pois

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t.$$

Da mesma forma $g_c(t) = c + g(t)$ é também condicionalmente negativa definida em S^1, para todo $c \in \mathbb{R}$.

As funções estritamente positivas definidas e as funções estritamente condicionalmente negativas definidas não negativas em $t = 0$ sempre produzem matrizes de interpolação inversíveis independentemente da quantidade de pontos a serem interpolados. Em vista desses fatos estudaremos, sistematicamente, esses dois tipos de funções. Todos os resultados deste trabalho serão estabelecidos somente para funções condicionalmente negativas definidas. Resultados análogos valem para funções positivas definidas e na maioria dos casos as provas são mais simples. No restante deste capítulo, estudamos em detalhes matrizes quase não positivas definidas e quase negativas definidas.

Lema 1.4 (Courant - Fischer) *Seja A uma matriz real simétrica de ordem n com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Se $\langle\ ,\ \rangle$ e $||\ ||$ denotam, respectivamente, o produto interno e a norma usuais de $\mathbb{R}^n$, então*

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

$$\lambda_2 = \min_{||y||=1} \max_{\substack{\langle x,y\rangle=0\\ x\neq 0}} \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle},$$

$$\vdots$$

$$\lambda_k = \min_{\substack{||y_i||=1\\ i=1,2,\ldots,k-1}} \max_{\substack{\langle x,y_i\rangle=0\\ x\neq 0}} \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Prova. p. 179 em [HJ]. ∎

Matrizes quase negativas definidas não são em geral inversíveis. No entanto, uma simples condição sobre o seu traço garante a invertibilidade.

Teorema 1.2 *Seja A uma matriz real de ordem n quase negativa definida com traço não negativo. Então,*

$$(-1)^{n-1} \det A > 0.$$

Prova. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A e suponhamos que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Pelo Lema 1.4,

$$\lambda_2 = \min_{||y||=1} \max_{\substack{\langle x,y\rangle=0\\ x\neq 0}} \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle} = \min_{||y||=1} \max_{\substack{\langle x,y\rangle=0\\ x\neq o}} \frac{x^t Ax}{||x||^2}.$$

Seja y um vetor unitário em $\mathbb{R}^n$, perpendicular ao hiperplano definido por

$$Z_n := \{\, y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} y_j = 0 \,\}.$$

Então, $\mathbb{R}^n = Z_n \oplus [\{y\}]$. Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, com $\langle x, y\rangle = 0$. Temos que $x \in Z_n$, pois se $x = z + \alpha y$, $z \in Z_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$0 = \langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle + \alpha\langle y, y\rangle = \alpha.$$

Como A é quase negativa definida, $x^t Ax < 0$. Logo, $(x^t Ax)/||x||^2 < 0$ e portanto $\max_{\substack{\langle x,y\rangle=0\\ x\neq 0}}(x^t Ax)/||x||^2 < 0$. Assim,

$$\lambda_2 = \min_{||y||=1} \max_{\substack{\langle x,y\rangle=0\\ x\neq 0}} \frac{x^t Ax}{||x||^2} < 0.$$

Como $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \cdots \leq \lambda_2$, segue que os $n-1$ autovalores $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são negativos. Como o traço de A é não negativo, o último autovalor λ_1 é positivo. Como $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$, segue que $(-1)^{n-1} \det A > 0$. ■

Lema 1.5 *Seja A uma matriz real de ordem n quase negativa definida. Se o traço de A é não negativo, então existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $d^t A d > 0$.*

Prova. Pelo Teorema 1.2, A tem um autovalor positivo, digamos λ. Seja $d \in \mathbb{R}^n$ o autovetor de A associado a λ. Então,

$$d^t A d = d^t(\lambda d) = \lambda d^t d = \lambda \sum_{i=1}^{n} d_i^2.$$

Como $d \neq 0$, $d^t A d > 0$. ■

Corolário 1.1 *Seja A uma matriz real simétrica de ordem $n \geq 2$ tal que*
(i) A é quase negativa definida;
(ii) Existe um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $d^t A d > 0$.
Então A tem um autovalor positivo e $n-1$ autovalores negativos.

Prova. Procedemos de maneira análoga à prova do teorema anterior. Como A é quase negativa definida temos que os $n-1$ autovalores $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são negativos. Pela hipótese, existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $d^t A d > 0$, o que implica que $d \neq 0$ e $(d^t A d)/||d||^2 > 0$. Logo, pelo Lema 1.4,

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{x^t A x}{||x||^2} > 0.$$

Portanto, A tem um autovalor positivo e $n-1$ autovalores negativos. ■

Observamos que a recíproca do Lema 1.5 não vale. Para isto, basta considerarmos $d = (3, 1)$ e a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

De fato, neste caso temos que A é quase negativa definida, $d^t A d > 0$ e o traço de A é negativo.

O Teorema 1.2 e o Corolário 1.1 mostram que funções estritamente condicionalmente negativas definidas não negativas em $t = 0$ produzem matrizes de interpolação inversíveis.

Lema 1.6 *Seja A uma matriz de ordem n real não negativa definida. Então, existe uma matriz C de ordem n tal que $A = C^t C$.*

Prova. p. 405 e 406 em [HJ]. ■

Teorema 1.3 *Seja A uma matriz real simétrica de ordem n com diagonal nula. Então, A é quase não positiva definida se, e somente se, existem n vetores $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ tais que*

$$A_{ij} = ||y_i - y_j||^2, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Prova. Suponhamos que existam $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ tais que

$$A_{ij} = ||y_i - y_j||^2, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Então, A é simétrica. Ainda, dado $c \in \mathbb{R}^n$ com $\sum_{j=1}^n c_j = 0$ temos:

$$\begin{aligned}
c^t A c &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j ||y_i - y_j||^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \left(||y_i||^2 + ||y_j||^2 - 2\langle y_i, y_j \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i ||y_i||^2 \sum_{i=1}^n c_j + \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n c_j ||y_j||^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \langle y_i, y_j \rangle \\
&= -2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \langle y_i, y_j \rangle \\
&= -2 \left|\left| \sum_{i=1}^n c_i y_i \right|\right|^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Logo, $c^t A c \leq 0$ quando $c \in \mathbb{R}^n$ e $\sum_{j=1}^n c_j = 0$. Portanto, A é quase não positiva definida. Reciprocamente, suponhamos que a matriz A seja quase não positiva definida. Seja D a matriz real $n \times (n-1)$ dada por

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Definamos a matriz real B de ordem $n-1$ por

$$B = -\frac{1}{2} D^t A D.$$

Afirmamos que B é não negativa definida. De fato, seja $c \in \mathbb{R}^{n-1}$. Então,

$$c^t B c = -\frac{1}{2} c^t D^t A D c = -\frac{1}{2} (Dc)^t A (Dc).$$

Agora,

$$Dc = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_{n-1} \\ c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Assim, o vetor $d = Dc = (-c_1, \dots, -c_{n-1}, c_1 + \cdots + c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\sum_{j=1}^n d_j = 0$. Como A é quase não positiva definida temos que

$$d^t A d = (Dc)^t A (Dc) \leq 0.$$

Logo,

$$c^t B c = -\frac{1}{2} (Dc)^t A (Dc) \geq 0, \quad c \in \mathbb{R}^{n-1},$$

mostrando a nossa afirmação. Pelo Lema 1.6, existe uma matriz real P de ordem $n-1$ tal que $B = P^t P$. Sejam $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ as colunas de P. Então,

$$B_{ij} = \langle y_i, y_j \rangle, \quad y_i \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{1.1}$$

Por um cálculo simples, obtemos:

$$-2B_{ij} = \left(D^tAD\right)_{ij} = A_{nn} + A_{ij} - A_{nj} - A_{in},\ 1 \leq i,j \leq n-1.$$

Como A é simétrica e por hipótese $A_{ii} = 0,\ 1 \leq i \leq n$, segue que

$$-2B_{ij} = A_{ij} - A_{jn} - A_{in}, \quad 1 \leq i,j \leq n-1. \tag{1.2}$$

Assim,

$$B_{jj} = A_{jn}, \quad 1 \leq j \leq n-1. \tag{1.3}$$

Logo, de (1.1), (1.2) e (1.3) temos:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= -2B_{ij} + A_{jn} + A_{in} \\ &= -2B_{ij} + B_{jj} + B_{ii} \\ &= ||y_i||^2 + ||y_j||^2 - 2\langle y_i, y_j\rangle \\ &= ||y_i - y_j||^2, \quad 1 \leq i,j \leq n-1. \end{aligned}$$

Portanto, $A_{ij} = ||y_i - y_j||^2$ para $1 \leq i,j \leq n-1$. Definindo $y_n = 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ obtemos

$$A_{ij} = ||y_i - y_j||^2, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

■

Observação. Nas hipóteses do teorema anterior, ainda temos que A é quase não positiva definida se, e somente se, existem n vetores $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^m,\ m \geq n$, tais que

$$A_{ij} = ||y_i - y_j||^2, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

De fato, para a parte necessária, sabemos que existem n vetores $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ tais que $A_{ij} = ||\xi_i - \xi_j||^2,\ 1 \leq i,j \leq n$. Agora, basta considerarmos a inclusão $\mathcal{I} : \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ por $\mathcal{I}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, \ldots, 0)$ e definirmos $y_j = \mathcal{I}(\xi_j),\ 1 \leq j \leq n$, que o resultado segue. A parte suficiente é análoga à do Teorema 1.3.

Capítulo 2

Condicionalidade Estrita Negativa Definida

Neste capítulo encontramos, separadamente, condições suficientes e necessárias para a condicionalidade estrita negativa definida de uma função contínua representada como no Teorema 1.1.

2.1 Condições Suficientes

A primeira condição suficiente, que apresentamos a seguir, revela a esperada conexão entre o problema de interpolação introduzido no Capítulo 1 e a interpolação trigonométrica.

Teorema 2.1 *Seja $g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(1 - \cos kt)$, onde $a_k \geq 0$ para todo k, e $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontos distintos em S^1. Para que a matriz A de ordem n com entradas $A_{ij} = g\left(d_1(x_i, x_j)\right)$ seja quase negativa definida é suficiente que $a_k > 0$ para $1 \leq k \leq [n/2]$.*

Prova. Pelo Teorema 1.1, a matriz A é quase não positiva definida. Suponhamos que $a_k > 0$ para $1 \leq k \leq [n/2]$ e seja $c \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ e $c^t A c = 0$.

Escrevamos $x_i = (\cos\theta_i, \operatorname{sen}\theta_i),\ 1 \leq i \leq n$, onde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ são pontos distintos módulo 2π. Então,

$$\begin{aligned}
c^tAc &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_ic_jg(0) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_ic_j \sum_{k=1}^{\infty} a_k(1-\cos kd_1(x_i,x_j)) \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_ic_j \cos k(\theta_i - \theta_j) \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_ic_j \cos k\theta_i \cos k\theta_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_ic_j \operatorname{sen} k\theta_i \operatorname{sen} k\theta_j\right]
\end{aligned}$$

e assim, podemos escrever $c^tAc = -(c^tBc + c^tCc)$ com

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta_i \cos k\theta_j,$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} k\theta_i \operatorname{sen} k\theta_j.$$

Afirmamos que as matrizes B e C são não negativas definidas. De fato, se $d \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}
d^tBd &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_id_j \cos k\theta_i \cos k\theta_j \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \cos k\theta_i\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$d^tCd = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \operatorname{sen} k\theta_i\right)^2 \geq 0.$$

Logo, a equação $c^tAc = \sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ implica $c^tBc = 0 = c^tCc$. Seja $r = [n/2]$. Como os coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_r$ são positivos por hipótese, $c^tBc = \sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ implica que $\sum_{i=1}^{n} c_i \cos k\theta_i = 0$ para $0 \leq k \leq r$. Portanto, o funcional linear $\mathcal{L}$ definido por

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{i=1}^{n} c_if(\theta_i)$$

anula as funções $1, \cos\theta, \cos 2\theta, \ldots, \cos r\theta$. O mesmo argumento mostra que $\mathcal{L}$ anula $\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen} 2\theta, \ldots, \operatorname{sen} r\theta$. Como $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ são distintos módulo 2π, existe um polinômio trigonométrico p de grau no máximo r tal que $p(\theta_i) = c_i$ para $1 \leq i \leq n$ (veja p. 29, 30 em [D]). Portanto,

$$0 = \mathcal{L}(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i p(\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2,$$

ou seja, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ e o resultado segue. ■

O teorema abaixo é motivado pela prova do teorema anterior.

Teorema 2.2 *Seja* $g(t) = g(0) + \sum_{k \in K} a_k(1 - \cos kt)$, *onde* $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_k > 0$ *para todo* k, *e* $\sum_{k\in K} a_k < \infty$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) g *é estritamente condicionalmente negativa definida de ordem* n *em* S^1*;*
(ii) Se $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp(i\theta_j x)$, *onde* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ *são pontos distintos módulo* 2π, $c_j \in \mathbb{R}$ *para* $1 \leq j \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ *e, se* f *anula-se em* K, *então* f *é identicamente nula.*

Prova. Suponhamos que a função g seja estritamente condicionalmente negativa definida de ordem n em S^1. Seja $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp(i\theta_j x)$, onde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ são pontos distintos módulo 2π, $c_j \in \mathbb{R}$ para $1 \leq j \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$, e suponhamos que f anula-se em K. Considerando $x_j := (\cos\theta_j, \operatorname{sen}\theta_j)$, $1 \leq j \leq n$, que são pontos distintos em S^1, a matriz $A = (g(d_1(x_i, x_j)))$, $1 \leq i, j \leq n$, é quase negativa definida devido à nossa hipótese. Seja $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ com $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$. Então:

$$\begin{aligned}
c^t A c &= \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} c_\mu c_\nu g(0) + \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} c_\mu c_\nu \sum_{k\in K} a_k(1 - \cos k d_1(x_\mu, x_\nu)) \\
&= -\sum_{k\in K} a_k \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} c_\mu c_\nu \cos k(\theta_\mu - \theta_\nu) \\
&= -\sum_{k\in K} a_k \left[\left(\sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \cos k\theta_\mu\right)^2 + \left(\sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \operatorname{sen} k\theta_\mu\right)^2\right] \\
&= -\sum_{k\in K} a_k \left|\sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \exp(ik\theta_\mu)\right|^2 = -\sum_{k\in K} a_k |f(k)|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, e consequentemente f é identicamente nula. Assim, (i) implica (ii). Suponhamos, agora, que a condição (ii) seja satisfeita. Considerando $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pontos distintos em S^1, podemos escrever $y_j = (\cos\theta_j, \operatorname{sen}\theta_j)$, onde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ são pontos distintos módulo 2π. Definamos a matriz B de ordem n por $B_{ij} = g(d_1(y_i, y_j))$. Sabemos que B é quase não positiva definida. Seja $c \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\sum_{j=1}^n c_j = 0$ e $c^t Bc = 0$. Então,

$$0 = c^t Bc = -\sum_{k\in K} a_k \left|\sum_{\mu=1}^n c_\mu \exp(ik\theta_\mu)\right|^2 .$$

Como $a_k > 0$ para todo $k \in K$, segue que $\sum_{\mu=1}^n c_\mu \exp(ik\theta_\mu) = 0$ para todo $k \in K$. Isto implica que a função $f(x) = \sum_{\mu=1}^n c_\mu \exp(i\theta_\mu x)$ anula-se em K. Pela nossa hipótese, f é identicamente nula. Como a matriz $(\exp(i\theta_\mu \nu))$, $1 \le \mu, \nu \le n$, é uma matriz de Vandermonde correspondente aos n pontos distintos $\exp(i\theta_1), \exp(i\theta_2), \ldots, \exp(i\theta_n)$, segue que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Portanto, a matriz B é quase negativa definida, e o resultado segue. ∎

Corolário 2.1 *Seja $g(t) = g(0) + \sum_{k\in K} a_k(1 - \cos kt)$, onde $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_k > 0$ para todo k, e $\sum_{k\in K} a_k < \infty$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) g é estritamente condicionalmente negativa definida em S^1;
(ii) Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \exp(i\theta_j x)$, onde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ são pontos distintos módulo 2π, $c_j \in \mathbb{R}$ para $1 \le j \le n$, $\sum_{j=1}^n c_j = 0$, e f anula-se em K, então f é identicamente nula.

Nosso próximo teorema é uma generalização do Teorema 2.1. Se n é um número natural, A é um subconjunto de $\mathbb{N}$ e B um subconjunto de $\mathbb{Z}$, denotaremos por nB o conjunto de todos os inteiros da forma nb, com $b \in B$ e por AB o conjunto de todos os inteiros da forma ab, com $a \in A$ e $b \in B$.

Lema 2.1 *Sejam $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ pontos quaisquer em $(0, 2\pi)$. Então, o conjunto dos zeros inteiros da função $F(x) = \prod_{j=1}^n (\exp(i\theta_j x) - 1)$ é da forma $J\mathbb{Z}$, com $J \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ de cardinalidade $\le n$.*

Prova. Se k é um zero inteiro da função F, então $\exp(i\theta_j k) = 1$ para algum $j = 1, 2, \ldots, n$. Equivalentemente, $k \in (2\pi/\theta_j)\mathbb{Z}$ para algum $j = 1, 2, \ldots, n$. Notemos que $2\pi/\theta_j$ é um número inteiro ou racional maior que 1. Podemos supor que $2\pi/\theta_j$ é um inteiro (caso contrário, escrevemos $2\pi/\theta_j = p_j/q_j$, onde $p_j, q_j > 1$ e p_j e q_j são relativamente primos, e portanto $k \in p_j\mathbb{Z}$). Seja J o subconjunto de $\{2\pi/\theta_1, \ldots, 2\pi/\theta_n\}$ tal que $k \in J\mathbb{Z}$ se e só se $F(k) = 0$. Então, $J \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e a cardinalidade de J é $\leq n$. ∎

Teorema 2.3 *Seja $g(t) = g(0) + \sum_{k\in K} a_k(1 - \cos kt)$, onde $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_k > 0$ para todo k, e $\sum_{k\in K} a_k < \infty$. Para que g seja estritamente condicionalmente negativa definida de ordem n ($n \geq 2$) em S^1 é suficiente que para cada $J \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ de cardinalidade $n - 1$, existam um inteiro positivo α e $k \in \mathbb{N} \setminus J\mathbb{N}$ tais que $\{\alpha, \alpha + k, \ldots, \alpha + (n-1)k\} \subset K$.*

Prova. Na hipótese de que para todo $J \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ de cardinalidade $n - 1$, existam $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus J\mathbb{N}$ tais que $\{\alpha, \alpha + k, \ldots \alpha + (n-1)k\} \subset K$, suponhamos, por absurdo, que a função não nula $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp(i\theta_j x)$, onde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ são pontos distintos módulo 2π, $c_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para $1 \leq j \leq n$, e $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$, anula-se em K. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\theta_1 = 0$ e $c_1 = 1$ (caso contrário, dividimos $f(x)$ por $c_1 \exp(i\theta_1 x)$). Pelo Lema 2.1, os zeros inteiros positivos da função $F(x) = \prod_{j=2}^{n} (\exp(i\theta_j x) - 1)$ são da forma $J\mathbb{N} \setminus \{0\}$ com $J \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ de cardinalidade $\leq n - 1$. Pela hipótese, existem $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus J\mathbb{N}$ tais que $\{\alpha, \alpha + k, \ldots, \alpha + (n-1)k\} \subset K$. Para tal k, $F(k) \neq 0$, ou seja, $1 \notin \{\exp(i\theta_j k) : 2 \leq j \leq n\}$. Seja p um polinômio da forma $p(t) = \sum_\mu a_\mu t^\mu$, $a_\mu \in \mathbb{C}$, cujo conjunto de zeros é $\{\exp(i\theta_j k) : j = 2, 3, \ldots, n\}$. Então, $\text{grau}(p) = n - 1$ e $p(1) \neq 0$. Seja $p(\bigtriangledown)$ o operador dado por :

$$p(\bigtriangledown)(h) := \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu h(\cdot + \mu k).$$

Então,

$$\begin{aligned}
p(\bigtriangledown)\,(\exp(i\theta_j x)) &= \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu \exp(i\theta_j(x+\mu k)) \\
&= \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu \exp(i\theta_j x)\exp(i\theta_j \mu k) \\
&= \exp(i\theta_j x)\sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu\,[\exp(i\theta_j k)]^\mu \\
&= \exp(i\theta_j x) p(\exp(i\theta_j k)) = 0, \quad 2 \leq j \leq n.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
p(\bigtriangledown)(f) &= p(\bigtriangledown)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \exp(i\theta_j\ \cdot)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j p(\bigtriangledown)(\exp(i\theta_j\ \cdot)) \\
&= c_1 p(\bigtriangledown)(\exp(i\theta_1\ \cdot)) \\
&= c_1 p(\bigtriangledown)(1) = p(1) \neq 0,
\end{aligned}$$

isto é, $p(\bigtriangledown)(f)$ é uma constante não nula. Agora, como $\alpha + \mu k \in K$, $0 \leq \mu \leq n-1$, segue que $f(\alpha+\mu k) = 0$, $0 \leq \mu \leq n-1$. Assim,

$$p(\bigtriangledown)(f)(\alpha) = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu f(\alpha+\mu k) = 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, f deve ser identicamente nula, e o resultado segue pelo Teorema 2.2. ■

Uma outra versão desse teorema será apresentada em nosso próximo resultado. Antes, precisamos do seguinte lema, similar ao anterior.

Lema 2.2 *Para cada número real s em $(0,1)$, existe um inteiro $m > 1$ tal que $\exp(2\pi i n s) \neq 1$ quando $n \in \mathbb{N} \setminus m\mathbb{N}$.*

Prova. Se s é irracional, seja $m > 1$ qualquer inteiro. Então ns não é um inteiro para $n \in \mathbb{N} \setminus m\mathbb{N}$, e portanto $\exp(2\pi ins) \neq 1$. Se s é racional, podemos escrever $s = k/m$, onde $1 \leq k < m$ e k e m são relativamente primos. Então, existem a e b inteiros tais que $1 = ak + bm$. Se $n \in \mathbb{N} \setminus m\mathbb{N}$ e $ns = j \in \mathbb{Z}$, então $j = ns = nk/m$, isto é, $nk = mj$. Logo,

$$n = n(ak + bm) = ank + nbm = ajm + nbm = (aj + nb)m.$$

Isto é uma contradição, pois n não é um múltiplo inteiro de m. Assim, $\exp(2\pi ns) \neq 1$, $n \in \mathbb{N} \setminus m\mathbb{N}$. ∎

Teorema 2.4 *Seja $g(t) = g(0) + \sum_{k\in K} a_k(1 - \cos kt)$, onde $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_k > 0$ para todo k, e $\sum_{k\in K} a_k < \infty$. Para que g seja estritamente condicionalmente negativa definida de ordem n em S^1 é suficiente que para cada conjunto A em $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ de cardinalidade $(n-1)n/2$, existam $b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $c \notin A\mathbb{N}$ e $b + c\{1, 2, \ldots, n\} \subset K$.*

Prova. Suponhamos que para todo conjunto A em $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ com cardinalidade $(n-1)n/2$ existam $b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $c \notin A\mathbb{N}$ e $b + c\{1, 2, \ldots, n\} \subset K$. Seja $f(x) = \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \exp(i\theta_\mu x)$, onde $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < 2\pi$, $c_\mu \in \mathbb{R}$ para $1 \leq \mu \leq n$ e, $\sum_{\mu=1}^{n} c_\mu = 0$, e suponhamos que f anule-se em K. Para inteiros μ e ν satisfazendo $1 \leq \nu < \mu \leq n$ temos que $0 < (\theta_\mu - \theta_\nu)/2\pi < 1$. Pelo Lema 2.2, existe um inteiro $m(\mu, \nu) > 1$ tal que

$$\exp\left(in(\theta_\mu - \theta_\nu)\right) \neq 1, \quad n \in \mathbb{N} \setminus m(\mu, \nu)\mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Considerando $A = \{m(\mu, \nu) : 1 \leq \nu < \mu \leq n\}$, que é um subconjunto de cardinalidade $(n-1)n/2$ de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, temos, por hipótese, que existem $b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $c \notin A\mathbb{N}$ e $b + c\{1, 2, \ldots, n\} \subset K$. Então,

$$f(b + \nu c) = \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \exp\left(i(b + \nu c)\theta_\mu\right) = 0, \quad 1 \leq \nu \leq n. \tag{2.2}$$

Afirmamos que a matriz B de ordem n com entradas

$$B_{\nu\mu} = \exp\left(i(b + \nu c)\theta_\mu\right) = \exp\left(i(b + c)\theta_\mu\right) \left[\exp(ic\theta_\mu)\right]^{\nu-1}$$

é não singular. De fato, se $1 \leq \mu_1 < \mu_2 \leq n$, então $c \notin m(\mu_1, \mu_2)\mathbb{N}$. Por (2.1), $\exp\left(ic(\theta_{\mu_1} - \theta_{\mu_2})\right) \neq 1$, ou equivalentemente, $\exp(ic\theta_{\mu_1}) \neq \exp(ic\theta_{\mu_2})$. Logo, B é uma matriz de Vandermonde correspondente aos n pontos distintos $\exp(ic\theta_\mu)$, $1 \leq \mu \leq n$, exceto pelo fator coluna não nulo $\exp\left(i(b + c)\theta_\mu\right)$. Isso mostra nossa afirmação. Assim, de (2.2) concluímos que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Portanto, f é identicamente nula e, pelo Teorema 2.2, o resultado segue. ∎

Teorema 2.5 *Seja $g(t) = g(0) + \sum_{k\in K} a_k(1 - \cos kt)$, onde $K \subset \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $a_k > 0$ para todo k, e $\sum_{k\in K} a_k < \infty$. Para que g seja uma função estritamente condicionalmente negativa definida em S^1 é suficiente que para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e cada conjunto $J \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ de cardinalidade $n - 1$, existam $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus J\mathbb{N}$ tais que $\{\alpha, \alpha + k, \ldots, \alpha + (n - 1)k\} \subset K$.*

Prova. Análoga à do Teorema 2.3. ∎

Definição 2.1 Uma sequência crescente $\{c_k\}$ de inteiros não negativos é dita ser *prima* se, para todo conjunto finito P de números primos existir um c_k não divisível por qualquer elemento de P. Equivalentemente, $\{c_k\}$ é uma sequência crescente não contida em qualquer conjunto da forma $p_1\mathbb{N} \cup p_2\mathbb{N} \cup \cdots \cup p_n\mathbb{N}$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são números primos.

Por exemplo, qualquer sequência infinita de números primos é uma sequência prima.

Lema 2.3 *Seja $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e $J \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tem cardinalidade $n - 1$, então existem $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus J\mathbb{N}$ tais que $\{\alpha, \alpha + k, \ldots, \alpha + (n - 1)k\} \subset K$;
(ii) Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e $A \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tem cardinalidade $(n - 1)n/2$, então existem

$b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $c \notin A\mathbb{N}$ e $b + c\{1, 2, \ldots, n\} \subset K$;

(iii) K contém um subconjunto da forma $\bigcup_{k=0}^{\infty}(b_k + c_k\mathbb{N}_k)$, onde $\{b_k\} \cup \{c_k\} \subset \mathbb{N}$, $\{c_k\}$ é uma sequência prima e, $\mathbb{N}_k = \{0, 1, \ldots, k\}$.

Prova. Suponhamos, inicialmente, que (i) vale. Sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e $A \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ um conjunto de cardinalidade $(n-1)n/2$. Considerando B um conjunto de cardinalidade $m \geq n+1$ tal que $B \supset A$ segue, de (i), que existem $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus B\mathbb{N}$ tais que $\{\alpha, \alpha + k, \ldots, \alpha + (m-1)k\} \subset K$. Como $A\mathbb{N} \subset B\mathbb{N}$, $k \notin A\mathbb{N}$. Portanto, para $b = \alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $c = k$ temos que $c \notin A\mathbb{N}$ e $b + c\{1, 2, \ldots, n\} \subset b + c\{0, 1, 2, \ldots, m-1\} \subset K$. Isto mostra que (i) implica (ii).
Suponhamos, agora, que (ii) vale. Seja $A_1 = \{2\}$. Por hipótese existem $b_1, c_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $c_1 \notin 2\mathbb{N}$ e $b_1 + c_1\{1, 2\} = (b_1 + c_1) + c_1\{0, 1\} \subset K$ ou, ainda, $(b_1 + c_1) + c_1\mathbb{N}_1 \subset K$. Para $A_2 = \{2, 3, 5\}$, existem $b_2, c_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $c_2 \notin 2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N}$ e $b_2 + c_2\{1, 2, 3\} = (b_2 + c_2) + c_2\{0, 1, 2\} \subset K$, ou $(b_2 + c_2) + c_2\mathbb{N}_2 \subset K$. Indutivamente, construímos duas sequências $\{d_k\}$, $\{c_k\} \subset \mathbb{N}$, onde $d_k := b_k + c_k$, tais que $d_k + c_k\mathbb{N}_k \subset K$ para $k = 1, 2, \ldots$. Logo, $\bigcup_{k=0}^{\infty}(d_k + c_k\mathbb{N}_k) \subset K$. Afirmamos que $\{c_k\}$ é uma sequência prima. De fato, dado um conjunto finito de números primos P, seja A_k o conjunto de números primos construídos que contém P. Então, existe c_k que não é divisível por qualquer elemento de A_k, e consequentemente c_k não é divisível por qualquer elemento de P, o que mostra nossa afirmação. Assim, (ii) implica (iii).
Finalmente, suponhamos que K contém um subconjunto da forma $\bigcup_{k=0}^{\infty}(b_k + c_k\mathbb{N}_k)$, onde $\{b_k\} \cup \{c_k\} \subset \mathbb{N}$ e $\{c_k\}$ é uma sequência prima. Sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e J um subconjunto de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ de cardinalidade $n - 1$. Seja P o conjunto de todos os divisores primos dos elementos de J. Como $\{c_k\}$ é uma sequência prima, existe c_{k_0} que não é divisível por qualquer elemento de P. Aumentando o conjunto P se necessário, podemos supor que k_0 é arbitrariamente grande. Então, $c_{k_0} \notin J\mathbb{N}$ e $b_{k_0} + c_{k_0}\mathbb{N}_{k_0} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty}(b_k + c_k\mathbb{N}_k) \subset K$. Se $b_{k_0} \neq 0$, tomamos $\alpha = b_{k_0}$ e $k = c_{k_0}$, e então (i) está verificada. Se $b_{k_0} = 0$, tomamos $\alpha = b_{k_0} + c_{k_0}$ e $k = c_{k_0}$, e novamente (i) está verificada. ■

Corolário 2.2 *Seja* $g(t) = g(0) + \sum_{k \in K} a_k(1 - \cos kt)$*, onde* $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$*,* $a_k > 0$ *para todo* k*, e* $\sum_{k \in K} a_k < \infty$*. Para que* g *seja uma função estritamente condicionalmente negativa definida em* S^1 *é suficiente que para cada* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ *e cada conjunto* A *em* $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ *de cardinalidade* $(n-1)n/2$*, existam* $b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *tais que* $c \notin A\mathbb{N}$ *e* $b + c\{1, 2, \ldots, n\} \subset K$*.*

Corolário 2.3 *Seja* $g(t) = g(0) + \sum_{k \in K} a_k(1 - \cos kt)$*, onde* $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$*,* $a_k > 0$ *para todo* k*, e* $\sum_{k \in K} a_k < \infty$*. Para que* g *seja estritamente condicionalmente negativa definida em* S^1 *é suficiente que* K *contenha um subconjunto da forma* $\bigcup_{k=0}^{\infty}(b_k + c_k\mathbb{N}_k)$*, onde* $\{b_k\} \cup \{c_k\} \subset \mathbb{N}$ *e* $\{c_k\}$ *é uma sequência prima.*

Observação 2.1 A hipótese "$\{c_k\}$ é uma sequência prima "no Corolário 2.3 pode ser trocada pelas seguintes hipóteses:
(H1) $\{c_k\}$ é crescente e não existe número primo dividindo infinitos c_k;
(H2) $\{c_k\}$ é crescente e quaisquer dois c_k são relativamente primos;
(H3) $\{c_k\}$ é crescente e para todo inteiro positivo n, existe um elemento de $\{c_k\}$ que não tem divisores em $\{2, 3, \ldots, n\}$.
Uma prova da equivalência entre (H1), (H2) e a definição de sequência prima pode ser encontrada em [Me2] e, uma prova do Corolário 2.3 com a hipótese (H3) em [C].

Exemplo 2 O conjunto $K := n + \mathbb{N}$, onde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, satisfaz a hipótese do Corolário 2.3. De fato, seja $\{c_k\}$ uma sequência infinita de números primos e, para cada k, defina $b_k := n + k$. Então, $b_k + c_k\mathbb{N}_k \subset K$, para todo k, ou seja, $\bigcup_{k \geq 0}(b_k + c_k\mathbb{N}_k) \subset K$.

Exemplo 3 Se $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ contém n inteiros consecutivos, então K satisfaz a hipótese do Teorema 2.3. De fato, neste caso existe um inteiro positivo α tal que $\{\alpha, \alpha + 1, \ldots, \alpha + (n-1)\} \subset K$. Como $1 \in \mathbb{N} \setminus J\mathbb{N}$ para cada $J \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ de cardinalidade $n - 1$, a afirmação segue.

Exemplo 4 Seja $g(t) = g(0) + \sum_{k \in K} a_k (1 - \cos kt)$, onde $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_k > 0$ para todo k, e $\sum_{k \in K} a_k < \infty$. Se K contém n progressões aritméticas da forma:

$$\alpha_j, \alpha_j + \beta_j, \ldots, \alpha_j + (n-1)\beta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

onde os números $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ são dois a dois relativamente primos, então g é estritamente condicionalmente negativa definida de ordem n. De fato, como na prova do Teorema 2.3, seja $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp(i\theta_j x)$, onde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ são distintos módulo 2π, $c_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para $1 \leq j \leq n$, e $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$, f anulando-se em K. Novamente, suponhamos, sem perda de generalidade, que $\theta_1 = 0$ e $c_1 = 1$. Pelo Lema 2.1, os zeros inteiros positivos da função $F(x) = \prod_{j=2}^{n} (\exp(i\theta_j x - 1))$ são da forma $J\mathbb{N} \setminus \{0\}$ com $J \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ de cardinalidade $\leq n - 1$. Isto significa que F não pode se anular em todos os números β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, pois, como $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ são dois a dois relativamente primos, nenhum $k\mathbb{N}$ pode conter mais que um β_j. Sem perda de generalidade, suponhamos que F não se anula em $\beta := \beta_1$, isto é, $1 \notin \{\exp(i\theta_j \beta) : 2 \leq j \leq n\}$. Seja p um polinômio da forma $p(t) = \sum_{\mu} a_\mu t^\mu$, $a_\mu \in \mathbb{C}$, cujo conjunto de zeros é $\{\exp(i\theta_j \beta) : 2 \leq j \leq n\}$. Então, grau$(p) = n - 1$ e $p(1) \neq 0$. Seja $p(\bigtriangledown)$ o operador dado por

$$p(\bigtriangledown)(h) = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu h(\cdot + \mu\beta).$$

Então, $p(\bigtriangledown)(\exp(i\theta_j x)) = \exp(i\theta_j x) p(\exp(i\theta_j \beta)) = 0$, para $2 \leq j \leq n$. Logo, $p(\bigtriangledown)(f)$ $= p(1) \neq 0$, isto é, $p(\bigtriangledown)(f)$ é uma constante não nula. Por outro lado, como f anula-se em $\alpha_j, \alpha_j + \beta_j, \ldots, \alpha_j + (n-1)\beta_j$, $1 \leq j \leq n$, segue que

$$p(\bigtriangledown)(f)(\alpha_1) = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu f(\alpha_1 + \mu\beta_1) = 0,$$

uma contradição. ∎

2.2 Condições Necessárias

Ainda considerando funções da forma dada no Teorema 1.1, apresentamos várias condições necessárias (independentes) para condicionalidade estrita negativa definida (de ordem n). Para a primeira delas necessitamos de alguns lemas técnicos.

Lema 2.4 *Sejam H um espaço com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$. Se $A := (\langle x_i, x_j\rangle)_{n\times n}$, então:*

(i) A é quase não negativa definida;

(ii) O posto de A é igual à cardinalidade do subconjunto linearmente independente maximal de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;

(iii) A é positiva definida se, e somente se, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é linearmente independente.

Prova. p. 407 em [HJ]. ■

Lema 2.5 *Sejam $A = (A_{ij})$ e $B = (B_{ij})$ matrizes simétricas de ordem n e $A \circ B$ o produto de Hadamard de A e B, isto é, $A \circ B = (A_{ij}B_{ij})$. Então, posto$(A \circ B) =$ posto(A).posto(B).*

Prova. Veja [H]. ■

Lema 2.6 *Seja $g(t) = g(0) + \sum_{k\in K} a_k(1 - \cos kt)$, onde $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ é um conjunto finito de cardinalidade N e $a_k > 0$ para todo $k \in K$. Então, para qualquer $n > 1 + N + (4/3)\sum_{k\in K} 2^k$ e qualquer conjunto de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em S^1, a matriz A de ordem n com entradas $A_{ij} = g(d_1(x_i, x_j))$ tem posto não excedendo n - 1.*

Prova. Sejam $n > 1 + N + (4/3)\sum_{k\in K} 2^k$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S^1$. Para cada $k \in K$ escrevamos $g_k(t) = 1 - \cos kt$. Por trigonometria elementar (veja [R]; p. 3) existem números reais $b_0, b_1, \ldots, b_{[k/2]}$ tais que

$$g_k(t) = 1 + \sum_{l=0}^{[k/2]} b_l \cos^{k-2l} t.$$

Logo,

$$g_k(d_1(x_i,x_j)) = 1 + \sum_{l=0}^{[k/2]} b_l \langle x_i, x_j\rangle^{k-2l}, \quad 1 \le i,j \le n.$$

Pelo Lema 2.4, a matriz de ordem n com entradas $\langle x_i, x_j\rangle$ é não negativa definida e tem posto não excedendo 2. Pelo Lema 2.5, a matriz de ordem n com entradas $\langle x_i, x_j\rangle^{k-2l}$, $0 \le l \le [k/2]$ tem posto não excedendo 2^{k-2l}. Logo, como o posto é semi-aditivo, cada matriz de ordem n com entradas $g_k(d_1(x_i,x_j))$ tem posto não excedendo $1 + \sum_{l=0}^{[k/2]} 2^{k-2l} = 1 + 2^{k+2}\left(1 - 2^{-2[k/2]}\right)/3$. Assim, o posto da matriz A não pode exceder

$$1 + \sum_{k\in K}\left(1 + \frac{2^{k+2}}{3}(1 - 2^{-2[k/2]})\right) < 1 + N + \frac{4}{3}\sum_{k\in K} 2^k < n.$$

■

O Lema 2.6 mostra que se g é uma função estritamente condicionalmente negativa definida, então a série representando g não pode ser uma soma finita. A seguir, obtemos uma versão aperfeiçoada deste fato.

Teorema 2.6 *Seja $g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(1-\cos kt)$, onde $a_k \ge 0$ para todo k, e $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$. Para que g seja uma função estritamente condicionalmente negativa definida em S^1 é necessário que $a_{2k} > 0$ para infinitos índices k e $a_{2k+1} > 0$ para infinitos índices k.*

Prova. Suponhamos que g seja estritamente condicionamente negativa definida em S^1 e, por absurdo, que $a_{2k} > 0$ para apenas um número finito de índices k. Seja $M := \max\{k : a_{2k} > 0\}$ e denotemos por N a cardinalidade do conjunto $K := \{k : 0 \le k \le 2M,\ a_k > 0\}$. Seja n um inteiro positivo tal que $n > 1 + N + (4/3)\sum_{k\in K} 2^k$. Escolhamos $2n$ pontos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ em S^1 dois a dois antipodais e definamos matrizes $2n \times 2n$, A, B e C por:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= -\sum_{k>2M} a_k \cos k d_1(x_i, x_j) \\ B_{ij} &= g(0) + \sum_{k>2M} a_k + \sum_{k\in K} a_k \left(1 - \cos k d_1(x_i, x_j)\right) \\ C_{ij} &= A_{ij} + B_{ij}. \end{aligned}$$

Se $1 \leq i < j \leq 2n$, consideramos o vetor $v^{ij} \in \mathbb{R}^{2n}$ tendo 1 como suas i-ésima e j-ésima componentes e 0 como as demais. Se $S := \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq 2n,\ x_i = -x_j\}$, o conjunto $\{v^{ij} : (i,j) \in S\}$ é um subconjunto do núcleo de A linearmente independente. Logo, o posto de A não é maior que n. Pelo Lema 2.6, o posto de B não excede $n-1$. Assim, C tem posto não excedendo $2n-1$. Isto implica que g não é estritamente condicionalmente negativa definida, o que é uma contradição. Portanto, $a_{2k} > 0$ para infinitos índices k. O restante da prova é similar ao caso anterior. ■

Observação 2.2 A condição no teorema anterior não é suficiente para garantir que a função g seja estritamente condicionalmente negativa definida em S^1. De fato, basta considerarmos $g(t) = \sum_{k\in K} a_k(1 - \cos kt)$, onde $K = 3\mathbb{N}$, $a_k > 0$ para todo k, e $\sum_{k\in K} a_k < \infty$. Se x_1 e x_2 são dois pontos em S^1 tais que $d_1(x_1, x_2) = 2\pi/3$, então a matriz de ordem 2 com entradas $g(d_1(x_i, x_j))$ é a matriz nula.

A seguir obtemos uma generalização do teorema anterior. Antes precisamos de um lema elementar.

Lema 2.7 *Se n é um inteiro positivo e ϕ não é um múltiplo ímpar de π, então*

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j \exp(ij\phi) = i sen(n\phi) \sec(\phi/2) \exp\left(i(2n+1)\phi/2\right).$$

Prova. Por trigonometria elementar temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2n} \cos(j\phi) &= \sum_{j=1}^{2n} \text{sen}\,(\phi/2)\cos(j\phi)\text{cosec}(\phi/2) \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2}\left[\text{sen}\,\left((2j+1)\phi/2)\right) - \text{sen}\,\left((2j-1)\phi/2\right)\right]\text{cosec}(\phi/2) \\
&= \frac{1}{2}\left[\text{sen}\,\left((4n+1)\phi/2\right) - \text{sen}\,(\phi/2)\right]\text{cosec}(\phi/2) \\
&= \text{sen}\,(n\phi)\cos\left((2n+1)\phi/2\right)\text{cosec}(\phi/2).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\sum_{j=1}^{2n} \text{sen}\,(j\phi) = \text{sen}\,(n\phi)\text{sen}\,\left((2n+1)\phi/2\right)\text{cosec}(\phi/2).$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{2n} \exp(ij\phi) = \text{sen}\,(n\phi)\text{cosec}(\phi/2)\exp\left(i(2n+1)\phi/2\right).$$

Agora, o resultado segue trocando-se ϕ por $\phi + \pi$ na última equação. ∎

Teorema 2.7 *Seja* $g(t) = g(0) + \sum_{k\in K} a_k(1 - \cos kt)$, *onde* K *é um subconjunto de* $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $a_k > 0$ *para todo* k, *e* $\sum_{k\in K} a_k < \infty$. *Para que* g *seja uma função estritamente condicionalmente negativa definida em* S^1 *é necessário que para cada inteiro positivo* n, *o conjunto* $n(1+2\mathbb{N}) \cap K$ *seja infinito.*

Prova. Suponhamos que g seja estritamente condicionalmente negativa definida em S^1. Primeiro mostraremos que para cada n o conjunto $n(1+2\mathbb{N}) \cap K$ é não vazio. Suponhamos, por absurdo, que exista um inteiro positivo n tal que $n(1+2\mathbb{N})\cap K = \emptyset$. Podemos supor que $n \geq 2$ (se $n = 1$, $(1+2\mathbb{N}) \cap K$ é infinito pelo Teorema 2.6). Escolhamos $2n$ pontos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ em S^1 tais que $d_1(x_j, x_{j+1}) = \pi/n$ para $1 \leq j \leq 2n-1$. Se B é a matriz com entradas $B_{ij} = g(d_1(x_i, x_j))$ e $c \in \mathbb{R}^{2n}$ é um vetor tendo $(-1)^j$ como sua j-ésima componente para $1 \leq j \leq 2n$, temos que

$$\begin{aligned}
c^t Bc &= \sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\mu(-1)^\nu g(0) + \sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\mu(-1)^\nu \sum_{k\in K} a_k \left(1-\cos kd_1(x_\mu,x_\nu)\right)\\
&= \sum_{k\in K} a_k \sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\mu(-1)^\nu \left(1-\cos\left(k(\mu-\nu)\pi/n\right)\right)\\
&= -\sum_{k\in K} a_k \sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\mu(-1)^\nu \cos\left(k(\mu-\nu)\pi/n\right)\\
&= -\sum_{k\in K} a_k \left[\left(\sum_{\mu=1}^{2n}(-1)^\mu\cos(\mu k\pi/n)\right)^2 + \left(\sum_{\mu=1}^{2n}(-1)^\mu \mathrm{sen}\,(\mu k\pi/n)\right)^2\right]\\
&= -\sum_{k\in K} a_k \left|\sum_{\mu=1}^{2n}(-1)^\mu \exp(i\mu k\pi/n)\right|^2.
\end{aligned}$$

Pela nossa hipótese em n, segue que $k\pi/n$ não é um múltiplo ímpar de π para todo $k \in K$. Logo, pelo Lema 2.7, $\sum_{\mu=1}^{2n}(-1)^\mu \exp(i\mu k\pi/n) = 0$ para todo k em K e, portanto, $c^tBc = 0$. Como $c \neq 0$, isto contradiz o fato de g ser estritamente condicionalmente negativa definida. Agora, para provarmos que cada conjunto $n(1+2\mathbb{N}) \cap K$ é infinito, suponhamos que $n(1+2\mathbb{N}) \cap K$ é finito para algum inteiro n e obtemos uma contradição. Seja $n(1+2l)$ o maior número em $n(1+2\mathbb{N}) \cap K$. Segue da primeira parte da prova que o conjunto $n(3+2l)(1+2\mathbb{N}) \cap K$ é não vazio. Como $n(3+2l)(1+2\mathbb{N}) \cap K \subset n(1+2\mathbb{N}) \cap K$, existe um inteiro não negativo m tal que $n(3+2l)(1+2m) \in n(1+2\mathbb{N}) \cap K$. Mas, $n(3+2l)(1+2m) \geq n(3+2l) > n(1+2l)$, contrariando nossa escolha de l. Portanto, para todo n, $n(1+2\mathbb{N}) \cap K$ é infinito. ■

Observação 2.3 Qualquer conjunto K satisfazendo a condição enunciada no teorema anterior contém infinitos múltiplos pares e infinitos múltiplos ímpares de qualquer inteiro positivo. Por outro lado, a condição não é suficiente para garantir condicionalidade estrita negativa definida como mostra o exemplo da Observação 2.2

Lema 2.8 *Se $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são números primos distintos, então os números da forma $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j/p_j$, onde $\varepsilon_j = 0$ ou 1, são todos distintos módulo $\mathbb{Z}$.*

Prova. É suficiente provarmos que qualquer número da forma $\sum_{j=1}^{n} \delta_j/p_j$ onde $\delta_j = 1$ ou -1, não é um inteiro. Suponhamos que $\sum_{j=1}^{n} \delta_j/p_j$ seja um inteiro para alguns δ_j como acima. Então, podemos escrever $\delta_1 p_2 \dots p_n + p_1 N = p_1 p_2 \dots p_n M$ para M e N inteiros. Isto mostra que p_1 é um divisor do produto $p_2 p_3 \dots p_n$, uma contradição. ■

Definição 2.2 Dizemos que um subconjunto K de $\mathbb{N}$ é *finitamente gerado* se existir um conjunto finito P de números primos tal que todo elemento em $K \setminus \{0, 1\}$ é um múltiplo de um elemento de P. Dizemos que K é *infinitamente gerado* se não for finitamente gerado.

Teorema 2.8 *Seja $g(t) = g(0) + \sum_{k \in K} a_k(1 - \cos kt)$, onde $K \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_k > 0$ para todo $k \in K$, e $\sum_{k \in K} a_k < \infty$. Para que g seja estritamente condicionalmente negativa definida em S^1 é necessário que K seja infinitamente gerado.*

Prova. Suponhamos que g seja estritamente condicionalmente negativa definida e, por absurdo, que K seja finitamente gerado por um conjunto $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ de números primos. Temos que a função não nula

$$h(t) = (\exp(i2\pi t/p_1) - 1)(\exp(i2\pi t/p_2) - 1) \dots (\exp(i2\pi t/p_n) - 1)$$

anula-se em K. Cálculos diretos mostram que podemos escrever h na forma

$$h(t) = \sum_{j=1}^{2^n} c_j \exp(i\phi_j t), \ 0 = \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{2^n}, \ \sum_{j=1}^{2^n} c_j = 0.$$

Pelo Lema 2.8, os ϕ_j são todos distintos módulo 2π. Logo, pelo Teorema 2.2, g não é estritamente condicionalmente negativa definida em S^1, uma contradição. ■

Observação 2.4 As condições enunciadas nos Teoremas 2.7 e 2.8, juntas, ainda não são suficientes para garantir condicionalidade estrita negativa definida. De fato, seja $g(t) = \sum_{k \in K} a_k(1 - \cos kt)$, onde $K = (1 + 2\mathbb{N}) \cup 4\mathbb{N}$, $a_k > 0$ para todo $k \in K$, e

$\sum_{k\in K} a_k < \infty$. Seja $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}$. Quaisquer quatro pontos igualmente espaçados x_1, x_2, x_3, x_4 em S^1 produzem a seguinte matriz 4×4 :

$$(g(d_1(x_i, x_j))) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & 2\alpha \\ 2\alpha & \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

que é uma matriz singular. Observe que as entradas na matriz de interpolação acima dependem apenas da parte ímpar $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}(1 - \cos(2k+1)t)$ de g. Isto sugere que K não contém uma "quantidade"suficiente de números pares.

A observação acima motiva o seguinte teorema:

Teorema 2.9 *Seja $g(t) = g(0) + \sum_{k\in K} a_k(1 - \cos kt)$, onde $K \subset \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $a_k > 0$ para todo k, e $\sum_{k\in K} a_k < \infty$. Para que g seja uma função estritamente condicionalmente negativa definida em S^1 é necessário que $L := \{k : 2k \in K\}$ seja infinitamente gerado.*

Prova. Procederemos como na prova do Teorema 2.8. Suponhamos que L seja finitamente gerado por um conjunto $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$ de números primos. A função não nula

$$h(t) = (\exp(i\pi t) + 1) \prod_{j=1}^{n-1} (\exp(i2\pi t/p_j) - 1)$$

anula-se em K. Usando o Lema 2.8, podemos escrever $h(t) = \sum_{j=1}^{2^n} c_j \exp(i\phi_j t)$ com $\sum_{j=1}^{2^n} c_j = 0$ e todos os ϕ_j distintos módulo 2π. Novamente pelo Teorema 2.2, concluímos que g não é estritamente condicionalmente negativa definida em S^1, uma contradição. ■

Observação 2.5 As condições necessárias apresentadas nos Teoremas 2.7, 2.8 e 2.9 são independentes umas das outras, como os conjuntos $2\mathbb{N} \cup (3 + 6\mathbb{N})$, $4\mathbb{N} \cup (1 + 2\mathbb{N})$ e $(4 + 2\mathbb{N}) \cup \{$ números primos $\}$ mostram. Não sabemos se estas três condições juntas, são suficientes para garantir condicionalidade estrita negativa definida. Contudo, fomos incapazes de construir um contra-exemplo.

Capítulo 3

O problema de interpolação ante a presença de pontos antipodais

Neste capítulo, estudamos, essencialmente, o problema de interpolação descrito no Capítulo 1, ainda usando funções condicionalmente negativas definidas, mas supondo a não existência de pares de pontos antipodais entre os pontos a serem interpolados. Questões relativas à dependência linear de conjuntos formados por funções da forma $x \to g(d_1(x, x_i))$, $x_i \in S^1$, são discutidas.

O teorema abaixo aparece de uma forma mais geral em [Me1]. Apresentamos, aqui, uma prova usando somente trigonometria elementar.

Teorema 3.1 *Seja* $g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(1 - \cos kt)$ *com* $a_k \geq 0$ *para todo* k *e,* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$*. Seja* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset S^1$ *e suponhamos que* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *não contém pares de pontos antipodais. Então, a matriz* A *de ordem* n *com entradas* $A_{ij} = g\left(d_1(x_i, x_j)\right)$ *é quase negativa definida nos seguintes casos:*

(i) $a_{2k} > 0$ *para* $1 \leq k < n$*;*

(ii) $a_{2k+1} > 0$ *para* $0 \leq k < n$*.*

Prova. Como na prova do Teorema 2.1, adotaremos um sistema de coordenadas polares em S^1 de modo que $x_j = (\cos\theta_j, \operatorname{sen}\theta_j)$ com $0 \leq \theta_j < 2\pi,\ 1 \leq j \leq n$. O sistema de coordenadas é escolhido de tal forma que $\cos\theta_i \neq \cos\theta_j$ para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, e $\cos\theta_j \neq 0$, $1 \leq j \leq n$. Essa escolha equivale à existência de um vetor $P \in S^1$, não perpendicular a todo x_j, tal que as projeções dos n vetores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na direção de P são todas distintas. Se $c \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\sum_{j=1}^n c_j = 0$, então

$$c^t A c = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j \cos k(\theta_i - \theta_j)$$

e assim podemos escrever $c^t A c = -(c^t B c + c^t C c)$ com

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos 2k(\theta_i - \theta_j) \\ C_{ij} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos(2k+1)(\theta_i - \theta_j). \end{aligned}$$

Notemos que as matrizes B e C são não negativas definidas. Assim, as igualdades $c^t A c = \sum_{j=1}^n c_j = 0$ implicam que $c^t B c = 0 = c^t C c$. Logo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \cos 2k\theta_j \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \operatorname{sen} 2k\theta_j \right)^2 = 0$$

e então,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \cos 2k\theta_j \right)^2 = 0. \tag{3.1}$$

Da mesma forma, a igualdade

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j \cos(2k+1)(\theta_i - \theta_j) = 0$$

implica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \cos(2k-1)\theta_j \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \operatorname{sen}(2k-1)\theta_j \right)^2 = 0$$

e então,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \cos(2k-1)\theta_j \right)^2 = 0. \tag{3.2}$$

Suponhamos, primeiramente, que $a_{2k} > 0$ para $1 \le k < n$. Então, de (3.1) e $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$, segue que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cos 2k\theta_j = 0, \quad 0 \le k \le n-1,$$

ou seja, $\sum_{j=1}^{n} c_j T_k(\cos 2\theta_j) = 0$, $0 \le k \le n-1$, onde T_k denota o polinômio de Chebyshev de grau k. Logo, o funcional linear $\mathcal{L}_1(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j f(\cos 2\theta_j)$ anula as funções $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$. Pela escolha do sistema de coordenadas e pela hipótese de não termos pares antipodais, segue que $\cos 2\theta_i \ne \cos 2\theta_j$ para $i \ne j$, $1 \le i, j \le n$. Assim, existe um polinômio p de grau $n-1$ (p. 24, [D]) tal que

$$p(\cos 2\theta_j) = c_j, \quad 1 \le j \le n.$$

Observando que o espaço dos polinômios de grau no máximo $n-1$ é gerado por $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$, temos:

$$0 = \mathcal{L}_1(p) = \sum_{j=1}^{n} c_j p(\cos 2\theta_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j^2,$$

isto é, $c = 0$. Assim, $c^t Bc > 0$ quando $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Portanto, $c^t Ac = -(c^t Bc + c^t Cc)$ < 0 quando $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, com $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$, ou seja, A é quase negativa definida.

Suponhamos, agora, que $a_{2k-1} > 0$ para $1 \le k < n+1$. Então por (3.2),

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cos(2k-1)\theta_j = 0, \quad 1 \le k \le n. \tag{3.3}$$

Usando a identidade (p. 35, [R])

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta, \quad n \ge 2,$$

com $n = 2k+1$ e somando em j, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cos(2k+1)\theta_j + \sum_{j=1}^{n} c_j \cos(2k-1)\theta_j = 2\sum_{j=1}^{n} c_j \cos\theta_j \cos 2k\theta_j.$$

Por (3.3), $\sum_{j=1}^{n} c_j \cos\theta_j \cos 2k\theta_j = 0$ para $1 \le k \le n-1$. Logo, o funcional linear

$$\mathcal{L}_2(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cos\theta_j f(\cos 2\theta_j)$$

anula $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$. Ainda, $\mathcal{L}_2(T_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cos\theta_j = 0$, pois basta tomarmos $k = 1$ em (3.3). Como $\cos\theta_j \neq 0$, $1 \leq j \leq n$, existe um polinômio p de grau $n-1$ tal que

$$p(\cos 2\theta_j) = \frac{c_j}{\cos\theta_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Assim,

$$0 = \mathcal{L}_2(p) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cos\theta_j p(\cos 2\theta_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j^2.$$

Como na parte anterior, A é quase negativa definida. ■

Usando uma vez mais a identidade

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t.$$

segue, pelo teorema anterior, que a matriz $(d_1(x_i, x_j))_{n \times n}$ é quase negativa definida contanto que os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S^1$ sejam distintos e dois a dois não antipodais. Notando-se ainda que seu traço é não negativo, concluímos, pelo Teorema 1.2, que, de fato, essa matriz é inversível.

Na verdade, a matriz acima é não singular mesmo havendo um único par de pontos antipodais no conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. A prova desse fato bem como outros resultados referentes à não singularidade dessa matriz são discutidos abaixo.

No que segue consideraremos a função γ definida por

$$\gamma(t) := \min_{j \in \mathbb{Z}} |t - 2\pi j|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lema 3.1 *Para $t \in [0, 2\pi)$ definamos $x_t := (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Então,*

$$\begin{aligned} d_1(x_t, x_s) &= \arccos\left(1 - \frac{1}{2}||x_t - x_s||^2\right) \\ &= \min\{|t-s|, 2\pi - |t-s|\} \\ &= \pi - ||t-s| - \pi| \\ &= \min_{j \in \mathbb{Z}} |t - s - 2\pi j| = \gamma(t-s), \quad t, s \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Prova. Temos que

$$
\begin{aligned}
d_1(x_t, x_s) &= \arccos\langle x_t, x_s\rangle \\
&= \arccos\left[\frac{1}{2}\left(||x_t||^2 + ||x_s||^2 - ||x_t - x_s||^2\right)\right] \\
&= \arccos\left(1 - \frac{1}{2}||x_t - x_s||^2\right).
\end{aligned}
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
d_1(x_t, x_s) &= \arccos[\cos t \cos s + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s] \\
&= \arccos[\cos(t - s)] \\
&= \min\{|t - s|, 2\pi - |t - s|\}.
\end{aligned}
$$

Pela equação

$$\min\{r - \pi, \pi - r\} = -|r - \pi|,$$

temos

$$\min\{r, 2\pi - r\} = \pi - |r - \pi|,$$

e, portanto

$$\min\{|t - s|, 2\pi - |t - s|\} = \pi - \left||t - s| - \pi\right|.$$

Para provarmos que

$$\min\{|t - s|, 2\pi - |t - s|\} = \min_{j \in \mathbb{Z}} |t - s - 2\pi j|,$$

suponhamos que $0 \leq s \leq t < 2\pi$. Então,

$$
\begin{aligned}
\min\{|t - s|, 2\pi - |t - s|\} &= \min\{|t - s|, |t - s - 2\pi|\} \\
&= \min_{j \in \mathbb{Z}} |t - s - 2\pi j|.
\end{aligned}
$$

■

Assim, podemos identificar os pontos de S^1 com números reais em $[0, 2\pi)$ e, então, transferimos a métrica para este intervalo, onde ela torna-se

$$d(x, y) = \gamma(x - y) = \min_{j \in \mathbb{Z}} |x - y - 2\pi j|, \quad x, y \in [0, 2\pi). \tag{3.4}$$

Lema 3.2 *A função d é uma métrica em $[0, 2\pi)$.*

Prova. Usaremos a fórmula (3.4). Claro que $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = d(y, x)$. Se $d(x, y) = 0$, então $x - y$ é um múltiplo de 2π. Como $0 \leq x, y < 2\pi$, segue que $x - y = 0$, isto é, $x = y$. Para a desigualdade triangular, sejam $x, y, z \in [0, 2\pi)$ e $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(x, z) = |x - z - 2\pi k|$. Para todo $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} |x - y - 2\pi j| &= |(x - z - 2\pi k) + (z - y + 2\pi k - 2\pi j)| \\ &\leq |x - z - 2\pi k| + |z - y - 2\pi(j - k)|. \end{aligned}$$

Tomando o mínimo em j, obtemos $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. ∎

Em nosso próximo resultado encontraremos o seguinte problema de interpolação:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j |z_i - z_j| = \mu_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde $z_1 < z_2 < \cdots < z_n$ e $\mu_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Este problema sempre tem solução. De fato, o algorítmo a seguir nos dá uma solução:

$$\begin{aligned} m_i &= (\mu_i - \mu_{i-1})/(z_i - z_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq n, \\ m_{n+1} &= -m_1 \ = \ (\mu_n + \mu_1)/(z_n - z_1), \\ c_i &= (m_{i+1} - m_i)/2, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Teorema 3.2 *Sejam $0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_n < 2\pi$. Se existir um único par (r, s) tal que $y_r = y_s + \pi$, então a matriz $(\gamma(y_i - y_j))$, $1 \leq i, j \leq n$, é não singular.*

Prova. Basta mostrarmos que para quaisquer escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ o problema de interpolação

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \gamma(y_i - y_j) = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

tem solução (veja p. 14 em [HJ]). Sejam $g_i(x) = \gamma(x - y_i)$ e G o espaço vetorial gerado por $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Definamos, para $1 \leq i \leq n$,

$$y'_i = \begin{cases} y_i + \pi & \text{, se } y_i < \pi \\ y_i - \pi & \text{, se } y_i \geq \pi. \end{cases}$$

Seja $q = \lambda_r + \lambda_s$, onde r e s são como na hipótese. Definamos, também, $Z = Y \cup Y'$, onde

$$Y = \{y_i : 1 \leq i \leq n\} \quad \text{e} \quad Y' = \{y_i' : 1 \leq i \leq n\}.$$

Por hipótese, $Y \cap Y' = \{y_s, y_r\}$ e, consequentemente, a cardinalidade de Z é $2n - 2$. Escrevamos $Z = \{z_i : 1 \leq i \leq 2n - 2\}$, onde

$$0 = z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < \pi = z_n < z_{n+1} < \cdots < z_{2n-2} < 2\pi.$$

Definamos, para $1 \leq i \leq 2n - 2$,

$$\mu_i = \begin{cases} \lambda_j & , \text{se } z_i = y_j \\ q - \lambda_j & , \text{se } z_i = y_j'. \end{cases}$$

(Note que existe um índice i_0 para o qual $z_{i_0} = y_r = y_s'$. Então, μ_{i_0} admite duas definições: como λ_r e como $q - \lambda_s$. Pela definição de q, essas definições coincidem). Pela observação feita antes deste teorema, existem coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j |z_i - z_j| = \mu_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Afirmamos, agora, que existem coeficientes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i |x - z_i| = \sum_{i=1}^{n} b_i \gamma(x - y_i), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

De fato, usaremos as seguintes identidades elementares

$$\gamma(x - y) = |x - y|, \quad x, y \in [0, \pi], \tag{3.5}$$

e

$$\gamma(x) + \gamma(x \pm \pi) = \pi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Como $1 \leq i \leq n$, $z_i \in [0, \pi]$. Se $z_i \in Y$ e $z_i = y_j$, então, por (3.5), temos

$$|x - z_i| = |x - y_j| = \gamma(x - y_j), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Se $z_i \in Y'$ e $z_i = y'_j$, então $y'_j \in [0, \pi]$. Pela definição de y'_j, $y_j \in [\pi, 2\pi)$, e $y'_j = y_j - \pi$. Assim, para $0 \leq x \leq \pi$ e usando (3.5) e (3.6), temos

$$\begin{aligned} |x - z_i| &= |x - y'_j| = |x - y_j + \pi| = \gamma(x - y_j + \pi) \\ &= \pi - \gamma(x - y_j) \\ &= \gamma(x - y_s) + \gamma(x - y_s - \pi) - \gamma(x - y_j) \\ &= \gamma(x - y_s) + \gamma(x - y_r) - \gamma(x - y_j). \end{aligned}$$

Portanto, cada termo $c_i|x - z_i|$ coincide com a restrição de uma função em G ao intervalo $[0, \pi]$. Isso mostra nossa afirmação.

Seja $f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \gamma(x - y_j)$. Queremos mostrar que $f(y_i) = \lambda_i$ para $1 \leq i \leq n$. Afirmamos que $f(z_i) = \mu_i$ para $1 \leq i \leq 2n-2$. De fato, se $1 \leq i \leq n$, então $0 \leq z_i \leq \pi$ e

$$f(z_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j \gamma(z_i - y_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j |z_i - z_j| = \mu_i.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} q &= \mu_n + \mu_1 = f(z_n) + f(z_1) = f(\pi) + f(0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j \left[\gamma(\pi - y_j) + \gamma(-y_j)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j \left[\gamma(y_j - \pi) + \gamma(y_j)\right] \\ &= \pi \sum_{j=1}^{n} b_j. \end{aligned}$$

Logo, se $n+1 \leq i \leq 2n-2$, então $z_i = z_k + \pi$ para algum $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(z_i) &= \sum_{j=1}^{n} b_j \gamma(z_i - y_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j \gamma(z_k + \pi - y_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j \left[\pi - \gamma(z_k - y_j)\right] \\ &= q - \sum_{j=1}^{n} b_j \gamma(z_k - y_j) \\ &= q - f(z_k) = q - \mu_k = \mu_i. \end{aligned}$$

■

Concluímos, pelo Teorema 3.2, que se $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset S^1$ contém somente um par de pontos antipodais, então a matriz $(d_1(x_i, x_j))$, $1 \leq i, j \leq n$, é não singular.

Agora, sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pontos distintos em $[0, 2\pi)$. Definamos

$$g_i(x) := \gamma(x - y_i) = \min_{j \in \mathbb{Z}} |x - y_i - 2\pi j|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observando que a função γ não é diferenciável em qualquer múltiplo inteiro de π, temos que cada função g_i não é diferenciável em todos os pontos $y_i + j\pi$ para $j \in \mathbb{Z}$. A seguir, veremos se as funções g_i formam um conjunto linearmente independente em $[0, 2\pi)$.

Lema 3.3 *Seja $0 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_n < 2\pi$. Se $\sum_{i=1}^{n} c_i g_i = 0$ e se todos c_i são não nulos, então n é par (digamos $n = 2k$), $n \geq 4$ e $y_{i+k} = y_i + \pi$ para $1 \leq i \leq k$.*

Prova. Primeiro provaremos que $y_1 < \pi$. Suponhamos, por absurdo, que $y_1 \geq \pi$. Então, as funções $g_2, g_3, \ldots, g_n$ são diferenciáveis em y_1. Como $c_1 \neq 0$, $g_1 = (-c_2 g_2 - c_3 g_3 - \cdots - c_n g_n)/c_1$ é diferenciável em y_1, uma contradição. Agora, afirmamos que para algum $j = 2, 3, \ldots, n$, $y_1 + \pi = y_j$. De fato, suponhamos, por absurdo, que para todo $j = 2, 3, \ldots, n$, $y_1 + \pi \neq y_j$. Então, novamente $g_2, g_3, \ldots, g_n$ são diferenciáveis em $y_1 + \pi$ enquanto g_1 não é diferenciável em $y_1 + \pi$, uma contradição. O mesmo argumento usado para y_1 pode ser aplicado a cada y_i em $[0, \pi)$. Assim, se $0 \leq y_i < \pi$

então $y_i + \pi = y_j$ para algum $j \neq i$. Afirmamos, agora, que se $y_j \in [\pi, 2\pi)$, então existe $i \neq j$ tal $y_j = y_i + \pi$. De fato, suponhamos que para todo $i \neq j$, $y_j - \pi \neq y_i$. Então, g_i é diferenciável em y_j para todo $i \neq j$, enquanto g_j não é diferenciável em y_j, uma contradição. Portanto, n é par, digamos $n = 2k$, e $y_{i+k} = y_i + \pi$ para $1 \leq i \leq k$. Finalmente, se $n = 2$, por hipótese, $c_1 g_1 + c_2 g_2 = 0$ com $c_1, c_2 \neq 0$. Mas g_1 e g_2 são linearmente independentes, uma contradição. Logo, $n \geq 4$. ■

Teorema 3.3 *Seja* $0 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_n < 2\pi$. *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ *é linearmente dependente;*

(ii) Existem dois elementos y_r *e* y_s *tais que* $y_r + \pi = y_t$ *para algum* t *e* $y_s + \pi = y_u$ *para algum* u.

Prova. Suponhamos que (i) seja verdadeira. Então, existe uma dependência linear da forma

$$\sum_{j=1}^{m} c_j g_{i_j} = 0, \;\; c_j \neq 0.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $i_1 < i_2 < \cdots < i_m e y_{i_1} < y_{i_2} < \cdots < y_{i_m}$. Pelo Lema 3.3, m é par $(m = 2k)$, $m \geq 4$ e $y_{i_j} + \pi = y_{i_{j+k}}$ para $1 \leq j \leq k$. Assim, (i) implica (ii). Suponhamos, agora, que (ii) vale. Usaremos a fórmula (3.6). Como $y_r + \pi = y_t$ e $y_s + \pi = y_u$, obtemos

$$\begin{aligned} \pi &= \gamma(x - y_r) + \gamma(x - y_r - \pi) = g_r(x) + \gamma(x - y_t) \\ &= g_r(x) + g_t(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$g_s(x) + g_u(x) = \pi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $(g_r + g_t) - (g_s + g_u) = 0$, ou seja, o conjunto $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ é linearmente dependente. ■

Teorema 3.4 *Seja* $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k-1)x$*, onde* $a_k \geq 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e,* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$*. Seja* $0 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_n < 2\pi$*. Se existem dois elementos* y_r *e* y_s *tais que* $y_r + \pi = y_t$ *para algum* t *e* $y_s + \pi = y_u$ *para algum* u*, então as funções* $h_i(x) = f(d(x, y_i))$ *formam um conjunto linearmente dependente. Se* $a_0 = 0$ *e existe um único elemento* y_r *tal que* $y_r + \pi = y_t$ *para algum* t*, o resultado ainda vale.*

Prova. Temos que

$$f(x) + f(\pi - x) = 2a_0 := b. \tag{3.7}$$

Suponhamos que $y_r + \pi = y_t$. Usando as equações (3.6) e (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} h_t(x) &= f(d(x, y_t)) = f(\gamma(y_t - x)) = f(\gamma(y_r + \pi - x)) \\ &= f(\pi - \gamma(y_r - x)) = b - f(\gamma(y_r - x)) = b - h_r(x), \end{aligned}$$

ou seja, $h_t + h_r = b$. Se $b = 0$, $h_t + h_r = 0$, e portanto $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ é linearmente dependente. Se $b \neq 0$ e se também temos $y_s + \pi = y_u$, então $h_u + h_s = b$. Assim,

$$(h_t + h_r) - (h_u + h_s) = 0,$$

e o resultado segue. ∎

Teorema 3.5 *Sejam* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *pontos distintos em* $[0, 2\pi)$*. Se* G *é o espaço vetorial gerado pelas funções* $g_1, g_2, \ldots, g_n$*, então* $\dim G = \min\{n, n+1-k\}$*, onde* k *é a cardinalidade do conjunto* $S := \{(i,j) : y_i + \pi = y_j\}$*.*

Prova. Seja I um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ contendo no máximo duas coordenadas de um mesmo par de S. Sem perda de generalidade, podemos supor que I é maximal no seguinte sentido: se $I \subset J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, então J tem pelo menos ambas as coordenadas de dois pares de S. Reordenando os pontos se necessário, podemos supor que $I = \{1, 2, \ldots, m\}$. Afirmamos que $m = \min\{n, n+1-k\}$. De fato, se $k = 0$, então $S = \emptyset$, e portanto $m = n = \min\{n, n+1\}$. Se $k \geq 1$, então I pode conter duas coordenadas de um par de S e uma coordenada de cada um dos $k - 1$

pares restantes, ou seja, $k-1$ coordenadas de pares de S não estão em I. Assim, $m = n - k + 1 = \min\{n, n+1-k\}$. Isso prova nossa afirmação. Agora, como I não contém ambas as coordenadas de quaisquer dois pares de S, o Teorema 3.3 implica que $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ é linearmente independente. Pela construção de I, cada conjunto $I \cup \{m+i\}$ contém todas as coordenadas de dois pares de S. Pelo Teorema 3.3, cada conjunto $\{g_1, g_2, \ldots, g_m, g_{m+i}\}$ é linearmente dependente. Assim $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ é um subconjunto linearmente independente maximal de $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Portanto, $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ é uma base de G, e o resultado segue. ∎

Teorema 3.6 *Seja* $0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_n < 2\pi$. *As seguintes condições são equivalentes:*
(i) O conjunto das n *funções* $g_i(x) = d(x, y_i)$ *é linearmente independente;*
(ii) A matriz $(g_i(y_j))$ *é não singular.*

Prova. Suponhamos que (i) vale. Então, pelo Teorema 3.5, existe no máximo um par (i,j) tal que $y_i = y_j + \pi$. Se existe exatamente um par, então (ii) segue do Teorema 3.2. Se não existe um tal par, $x_{y_i} := (\cos y_i, \operatorname{sen} y_i)$, $1 \le i \le n$, são pontos distintos em S^1 dois a dois não antipodais. Assim, pela observação após o Teorema 3.1, a matriz $\big(d_1(x_{y_i}, x_{y_j})\big) = (\gamma(y_i - y_j)) = (g_i(y_j))$ é não singular. Portanto, (i) implica (ii). Agora, suponhamos que (ii) seja verdadeira. Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tais que $\sum_{i=1}^{n} c_i g_i = 0$. Então, $\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(y_j) = 0$ para $1 \le j \le n$. Como $(g_i(y_j))$ é uma matriz não singular, segue que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ e (i) está verificada. ∎

Referências Bibliográficas

[B] **Baxter, B.J.C.**, *Conditionally Positive Functions and p-Norm Distance Matrices*, Construtive Approximation **7** (1991), 427 - 440.

[Bo] **Bochner, S.**, *Hilbert Distances and Positive Definite Functions*, Annals of Mathematics **42** (1941), 647 - 656.

[C] **Cheney, E.W.**, *Approximation Using Positive Definite Functions*, Approximation Theory VIII, Charles K. Chui e Larry L. Schumaker (eds.), World Scientific Publishing, 1995.

[D] **Davis, P.J.**, *Interpolation and Approximation*, Blaisdell, New York, 1963. Reprint, Dover Publ., New York.

[H] **Horn, R.A.**, *The Hadamard Product*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, **40** (1990), 87 - 169.

[HJ] **Horn, R.A., Johnson, C.R.**, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[LC] **Light, W.A., Cheney, E.W.**, *Interpolation by Periodic Radial Basis Functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **168** (1992), 111 - 130.

[Me1] **Menegatto, V.A.**, *Interpolation on Spherical Domains*, Analysis **14** (1994), 415 - 424.

[Me2] **Menegatto, V.A.**, *Strictly Positive Definite Kernels on the Circle*, a aparecer em Rocky Mountain Journal of Mathematics.

[Mi] **Micchelli, C.A.**, *Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally Positive Definite Functions*, Constructive Approximation **2** (1986), 11 - 22.

[R] **Rivlin, T.J.**, *The Chebyshev Polinomials*, Wiley, New York, 1974.

[RS1] **Ron, A., Sun, X.**, *Strictly Positive Definite Functions on Spheres*, CMS TR 94 - 6, University of Wisconsin-Madison, 1994.

[RS2] **Ron, A., Sun, X.**, *Strictly Positive Definite Functions on Spheres*, a aparecer em Mathematics of Computation.

[S] **Schoenberg, I.J.**, *Positive Definite Functions om Spheres*, Duke Math. J. **9** (1942), 96 - 108.

[XC] **Xu, Y., Cheney, W.**, *Strictly Positive Definite Functions on Spheres*, Proceedings of the American Mathematical Society **116** (1992), 977 - 981.

[WW] **Wells, J.H., Williams**, L.R., *Embeddings and Extensions in Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1975.