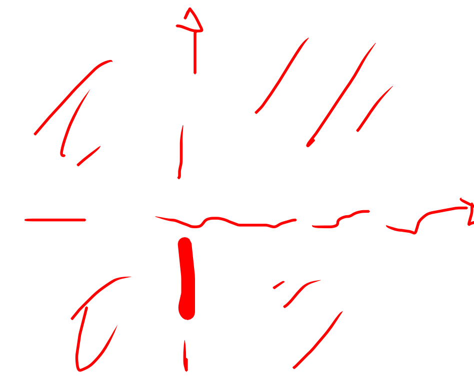
$g(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$ $\quad D = \operatorname{dom} g = \{(x,y) : xy \neq 0\}$



$h(t) = \operatorname{sen}(t)$ é cont. em $\mathbb{R}$

$f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ é cont. em D (f é racional)

$\therefore$ g é cont. em D

(composta de f's cont.)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$P = (0,0)$

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$C_1 : x \to 0 \qquad \lim_{C_1} = 0$

$C_2 : x \to y \qquad \lim_{C_2} = \frac{1}{2}$

f não é cont. em $(0,0)$

$\Rightarrow$ f não é dif em $(0,0)$

$(a,b) \neq (0,0)$

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$

$\therefore$ f_x e f_y são cont. em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\therefore$ f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{?}{=} f(0,0) = 0$ ✓

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{pois}:$$

$\downarrow$ 0 limitada

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1, \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$$

$\therefore$ f é cont. em $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) $f_x(0,0) = ?$ $\qquad f_y(0,0) = ?$

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2+0} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \boxed{1}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{0}{y^2} - 0}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = \boxed{0}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=0$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2\cdot(x^2+y^2)-x^3\,2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & x=y=0\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$C_1: \; y=x$

$C_2: \; x=0$

$C_3: \; y=0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_1}} \frac{x^4-3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4-3x^4}{(2x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^4}{4x^4} = -\frac{1}{2}$$

$C_1 : y = x.$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_2}} \frac{x^4-3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

$C_2 : x = 0$

$\therefore$ f_x não é cont em $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$= x^3 (x^2+y^2)^{-1}$

$f_y(0,0) = 0$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} x^3\left(-(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y\right) = \dfrac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = \lim \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$C_1: x = 0$ (ou $y = 0$)

$C_2: y = x$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_1}} \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

$C_1: x = 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_2}} \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^4}{(2x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cancel{x^4}}{4\cancel{x^4}} = -\frac{1}{2}$$

$C_2: y = x$

$\therefore$ f_y não é contínua em $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\boxed{E(\mathbf{h}) := f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \nabla f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{h}}$$

$$\nabla f(0,0) = (f_x(0,0),\ f_y(0,0))$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,\ 0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)\cdot h - f_y(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - 0 - 1\cdot h - 0k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\left[\frac{h^3}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} - \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right]$$

$$\lim \frac{h^3 - h^3 - hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{k^2+h^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{k\to 0} \frac{k^3}{2k^2\sqrt{2k^2}} =$$

C_1

$C_1 : h = k$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k^{\cancel{3}}}{2\cancel{k^2}\sqrt{2}\,|k|} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{k}{|k|} \nexists$$

$$\therefore \nexists \lim_{h\to 0} \frac{E(h)}{\|h\|} \quad \therefore f \text{ NÃO é dif em } (0,0)$$