Polinômios de Taylor, extremos locais

Ana Claudia Nabarro, Ana Paula Peron, Farid Tari

Aula de Consolidação #11, Cálculo 2, 2020

Questão 1

Questão 1: *Considere a função* $f(x,y)=\sqrt{xy}$.

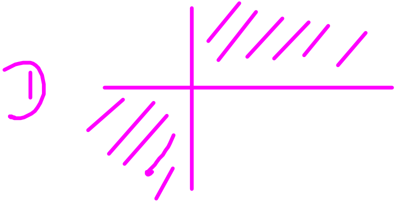
1. *Encontre o polinômio de Taylor* P_1 *de ordem 1 de* f *em torno de* $(1,1)$.
2. *Avalie o erro cometido na aproximação* $\sqrt{xy}\approx P_1(x,y)$ *na região* $R: -0.1\le x-1\le 0.1,\ -0.1\le y-1\le 0.1.$
3. *Encontre o polinômio de Taylor* P_2 *de ordem 2 de* f *em torno de* $(1,1)$.
4. *Avalie o erro cometido na aproximação* $\sqrt{xy}\approx P_2(x,y)$ *na região* R.

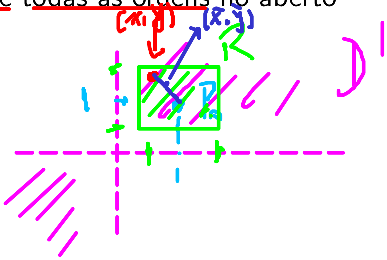
$g(t) = \sqrt{t}$ dif $\mathbb{R} - \{0\}$

$f(x,y) = \sqrt{xy} = (xy)^{1/2}$

pol. dif $\mathbb{R}^2$

Observe que a função f é definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ e possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens no aberto $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$.





O ponto $p_0 = (1, 1) \in D'$, então o Teorema de Taylor se aplica para f em torno de p_0.

$f \in C^\infty(D')$

$-0{,}1 \leq x - 1 \leq 0{,}1$ ($y-1$)

$0{,}9 \leq x \leq 1{,}1$

Solução Q1-(a)

(a) Para calcular o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $p_0 = (1, 1)$, precisamos calcular $f(1, 1)$, $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$.

Solução Q1-(a) $f(x,y) = (xy)^{1/2}$

(a) Para calcular o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $p_0 = (1,1)$, precisamos calcular $f(1,1)$, $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$. Temos $f(1,1) = 1$ e

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{y}{(xy)^{1/2}} \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{x}{(xy)^{1/2}} \end{aligned}$$

D^1

Solução Q1-(a)

P_1 de f em torno $(1,1)$

(a) Para calcular o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $p_0 = (1,1)$, precisamos calcular $f(1,1)$, $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$. Temos $f(1,1) = 1$ e

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{y}{(xy)^{1/2}} \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{x}{(xy)^{1/2}} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} f_x(1,1) &= \frac{1}{2} \\ f_y(1,1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $p_0 = (1,1)$ é dado por

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1).(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{P_1(x,y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.}$$

Solução Q1-(b)

(b) Para encontrar uma estimativa do erro cometido ao aproximar f por P_1 na região compacta R, vamos encontrar um limitante para as derivadas parciais de ordem 2 de f na região R.

Solução Q1-(b)

(b) Para encontrar uma estimativa do erro cometido ao aproximar f por P_1 na região compacta R, vamos encontrar um limitante para as derivadas parciais de ordem 2 de f na região R.

Temos

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= -\frac{1}{4}\frac{y^2}{(xy)^{3/2}},\\
f_{xy}(x,y) &= \frac{1}{4}\frac{1}{(xy)^{1/2}},\\
f_{yy}(x,y) &= -\frac{1}{4}\frac{x^2}{(xy)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Em R temos

Solução Q1-(b)

$$\frac{9}{10} \leq x \leq \frac{11}{10} \qquad \frac{9}{10} \leq y \leq \frac{11}{10}.$$

Solução Q1-(b)

$$0 < \frac{9}{10} \leq x \leq \frac{11}{10} \quad 0 < \frac{9}{10} \leq y \leq \frac{11}{10}.$$

Portanto

$$\left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2, \qquad \left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq y^2 \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2.$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq xy \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2,$$

$$\frac{9}{10} \leq x \leq \frac{11}{10} \qquad \frac{9}{10} \leq y \leq \frac{11}{10}.$$

Portanto

$$\left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2, \qquad \left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq y^2 \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2.$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq xy \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2,$$

Logo

$$\left(\frac{10}{11}\right)^2 \leq \frac{1}{xy} \leq \left(\frac{10}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{10}{11} \leq \frac{1}{(xy)^{1/2}} \leq \frac{10}{9}$$

$$\left(\frac{10}{11}\right)^3 \leq \frac{1}{(xy)^{3/2}} \leq \left(\frac{10}{9}\right)^3$$

Solução Q1-(b)

$$\frac{9}{10} \leq x \leq \frac{11}{10} \qquad \frac{9}{10} \leq y \leq \frac{11}{10}.$$

Portanto

$$\left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2, \qquad \left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq y^2 \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2.$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq xy \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2,$$

Logo

$$\frac{10}{11} \leq \frac{1}{(xy)^{1/2}} \leq \frac{10}{9}$$

$$\left(\frac{10}{11}\right)^3 \leq \frac{1}{(xy)^{3/2}} \leq \left(\frac{10}{9}\right)^3.$$

Solução Q1-(b)

Daí, para todo $(x, y) \in R$

$$|f_{xx}(x,y)| = \left| -\frac{1}{4}\frac{y^2}{(xy)^{3/2}} \right| \le \frac{1}{4}\left(\frac{11}{10}\right)^2\left(\frac{10}{9}\right)^3 = \frac{11^2 \cdot 10}{4 \cdot 9^3},$$

$$|f_{yy}(x,y)| = \left| -\frac{1}{4}\frac{x^2}{(xy)^{3/2}} \right| \le \frac{11^2 \cdot 10}{4 \cdot 9^3},$$

$= M$

$$|f_{xy}(x,y)| = \left| \frac{1}{4}\frac{1}{(xy)^{1/2}} \right| \le \frac{1}{4}\frac{10}{9} < \frac{1}{4}\frac{10}{9}\frac{11^2}{9^2}.$$

Solução Q1-(b)

Daí, para todo $(x, y) \in R$

$$|f_{xx}(x,y)| = \left| -\frac{1}{4}\frac{y^2}{(xy)^{3/2}} \right| \le \frac{1}{4}\left(\frac{11}{10}\right)^2\left(\frac{10}{9}\right)^3 = \frac{11^2 \cdot 10}{4 \cdot 9^3},$$

$$|f_{yy}(x,y)| = \left| -\frac{1}{4}\frac{x^2}{(xy)^{3/2}} \right| \le \frac{11^2 \cdot 10}{4 \cdot 9^3},$$

$$|f_{xy}(x,y)| = \left| \frac{1}{4}\frac{1}{(xy)^{1/2}} \right| \le \frac{1}{4}\frac{10}{9} < \frac{1}{4}\frac{10}{9}\frac{11^2}{9^2}.$$

Logo $M = \frac{11^2 \cdot 10}{4 \cdot 9^3}$ é um limitante para todas as derivadas parciais de ordem 2 de f em R.

Solução Q1-(b)

Daí, para todo $(x, y) \in R$

$$|f_{xx}(x,y)| = \left| -\frac{1}{4}\frac{y^2}{(xy)^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{11}{10}\right)^2\left(\frac{10}{9}\right)^3 = \frac{11^2 \cdot 10}{4 \cdot 9^3},$$

$$|f_{yy}(x,y)| = \left| -\frac{1}{4}\frac{x^2}{(xy)^{3/2}} \right| \leq \frac{11^2 \cdot 10}{4 \cdot 9^3},$$

$$|f_{xy}(x,y)| = \left| \frac{1}{4}\frac{1}{(xy)^{1/2}} \right| \leq \frac{1}{4}\frac{10}{9} < \frac{1}{4}\frac{10}{9}\frac{11^2}{9^2}.$$

Logo $M = \frac{11^2 \cdot 10}{4 \cdot 9^3}$ é um limitante para todas as derivadas parciais de ordem 2 de f em R.

$R : |x-1| \leq 0.1$ e $|y-1| \leq 0.1$.

$-0{,}1 < x-1 < 0{,}1$

Solução Q1-(b)

Consequentemente, o resto de Lagrange de ordem 2 em torno do ponto $(1, 1)$ satisfaz $(\bar{x}, \bar{y}) \in \overline{(1,1)\,(x,y)}$ $(x,y) \in \mathbb{R}$

$$|E(x,y)| = \left| \frac{1}{2!} \left(f_{xx}(\bar{x},\bar{y}).(x-1)^2 + 2f_{xy}(\bar{x},\bar{y})(x-1)(y-1) + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(y-1)^2 \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[|f_{xx}(\ )|\,|x-1|^2 + 2\,|f_{xy}(\ )|\,|x-1|\,|y-1| + |f_{yy}(\ )|\,|y-1|^2 \right]$$

Solução Q1-(b)

$f(x,y) = \sqrt{xy} \approx P_1(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$

Consequentemente, o resto de Lagrange de ordem 2 em torno do ponto $(1,1)$ satisfaz

$(x,y) \in R$

$$|E(x,y)| = \left| \frac{1}{2!} \left(f_{xx}(\bar{x},\bar{y}).(x-1)^2 + 2f_{xy}(\bar{x},\bar{y})(x-1)(y-1) + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(y-1)^2 \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\underbrace{|f_{xx}|}_{\leq M} |x-1|^2 + 2\underbrace{|f_{xy}|}_{\leq M}|x-1||y-1| + \underbrace{|f_{yy}|}_{\leq M}|y-1|^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} M \left[|x-1|^2 + 2|x-1||y-1| + |y-1|^2 \right]$$

$$\leq \frac{1}{2} M (|x-1| + |y-1|)^2 \leq \frac{1}{2} M (0.1 + 0.1)^2 \leq 2 \cdot M \cdot 10^{-2}$$

$$= 2 \cdot 10^{-2} \frac{11^2 \cdot 10}{4 \cdot 9^3} \approx 0.00829903978,$$

para todo $(x,y) \in R = \{(x,y) : |x-1| < 0.1, \ |y-1| < 0.1\}$.

Solução Q1-(b)

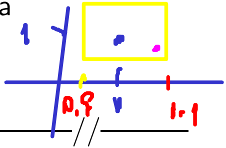
Então o erro cometido ao aproximar $\sqrt{xy} \approx P_1(x, y) = x/2 + y/2$ em qualquer ponto da região R é menor ou igual a

$$\frac{11^2}{2 \cdot 9^3} 10^{-1} \approx 0.00829903978.$$

Solução Q1-(b)

Então o erro cometido ao aproximar $\sqrt{xy} \approx P_1(x, y) = x/2 + y/2$ em qualquer ponto da região R é menor ou igual a

$$\frac{11^2}{2 \cdot 9^3} 10^{-1} \approx 0.00829903978.$$



———————//———————//———————//———————//———

$(1.08, 0.95) \in R$

Solução Q1-(b)

Então o erro cometido ao aproximar $\sqrt{xy} \approx P_1(x, y) = x/2 + y/2$ em qualquer ponto da região R é menor ou igual a

$$\frac{11^2}{2 \cdot 9^3} 10^{-1} \approx 0.00829903978.$$

——————//——————//——————//——————//———

$\sqrt{(1.08)(0.95)} \approx 1{,}115$

$(1.08, 0.95) \in R$

$$P_1(1.08, 0.95) = \frac{1.08}{2} + \frac{0.95}{2} = 0.54 + 0.475 = 1.115$$

Solução Q1-(b)

Então o erro cometido ao aproximar $\sqrt{xy} \approx P_1(x,y) = x/2 + y/2$ em qualquer ponto da região R é menor ou igual a

$$\frac{11^2}{2 \cdot 9^3} 10^{-1} \approx 0.00829903978.$$

——————//——————//——————//——————//———

$(1.08, 0.95) \in R$

$$P_1(1.08, 0.95) = \frac{1.08}{2} + \frac{0.95}{2} = 0.54 + 0.475 = 1.115$$

calculadora: $f(1.08, 0.95) = 1.01291658097 \approx \sqrt{(1{,}08)(0{,}95)}$

Solução Q1-(b)

Então o erro cometido ao aproximar $\sqrt{xy} \approx P_1(x, y) = x/2 + y/2$ em qualquer ponto da região R é menor ou igual a

$$\frac{11^2}{2 \cdot 9^3} 10^{-1} \approx 0.00829903978.$$

———————//———————//———————//———————//———————

$(1.08, 0.95) \in R$

$$P_1(1.08, 0.95) = \frac{1.08}{2} + \frac{0.95}{2} = 0.54 + 0.475 = 1.0115$$

calculadora: $f(1.08, 0.95) = 1.01291658097$

3

> 100

$$|E(x, y)| < \frac{11^2}{2 \cdot 9^3} 10^{-1} < \frac{200}{2 \cdot 100} \frac{1}{10} = \boxed{10^{-1}}$$

0,1

$$|f(1.08, 0.8) - P_1(1.08, 0.8)| = 0.00208341903 \checkmark$$

Solução Q1-(c)

(c) Para calcular o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de $p_0 = (1,1)$, precisamos calcular $f(1,1)$, $f_x(1,1)$, $f_y(1,1)$, $f_{xx}(1,1)$, $f_{xy}(1,1)$ e $f_{yy}(1,1)$. Temos

$$f_{xx}(1,1) = -\frac{1}{4},\ f_{xy}(1,1) = \frac{1}{4},\ f_{yy}(1,1) = -\frac{1}{4}$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de $p_0 = (1,1)$ é dado por

(c) Para calcular o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de $p_0 = (1,1)$, precisamos calcular $f(1,1)$, $f_x(1,1)$, $f_y(1,1)$, $f_{xx}(1,1)$, $f_{xy}(1,1)$ e $f_{yy}(1,1)$. Temos

$$f_{xx}(1,1) = -\frac{1}{4},\ f_{xy}(1,1) = \frac{1}{4},\ f_{yy}(1,1) = -\frac{1}{4}$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de $p_0 = (1,1)$ é dado por

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1).(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + \\ &\frac{1}{2!}(f_{xx}(1,1).(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,1).(x-1).(y-1) + f_{yy}(1,1).(y-1)^2) \end{aligned}$$

$$P_2(x,y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{8}y^2.$$

Solução Q1-(d)

$$E(x,y) = \frac{1}{3!}\left[f_{xxx}(\cdot)(x-1)^3 + 3 f_{xxy}(\cdot)(x-1)^2(y-1) + 3 f_{yyx}(\cdot)(x-1)(y-1)^2 + f_{yyy}(\cdot)(y-1)^3 \right]$$

(d) Para encontrar uma estimativa do erro cometido ao aproximar f por P_2 na região compacta R, vamos encontrar um limitante M para as derivadas parciais de ordem 3 de f na região R. Daí

$$\begin{aligned}
|E(x,y)| &\leq \frac{1}{3!} M (|x-1| + |y-1|)^3 \\
&\leq \frac{1}{6} M (0.1 + 0.1)^3 \\
&\leq \frac{4}{3} 10^{-3} M
\end{aligned}$$

Encontrem um valor para M e comparem as amplitudes dos erros da aproximação de f por P_1 e P_2 na região R.

Solução Q1-(d)

$$|f_{xxx}(x,y)| = \left|\frac{3}{8}\frac{y^3}{(xy)^{5/2}}\right| \leq \frac{3}{8}\left(\frac{11}{10}\right)^3\left(\frac{10}{9}\right)^5$$

$$|f_{xxy}(x,y)| = \left|-\frac{1}{8}\frac{y^2x}{(xy)^{5/2}}\right| \leq \frac{3}{8}\frac{11^3}{9^5}10^2$$

$$|f_{yyx}(x,y)| = \left|-\frac{1}{8}\frac{x^2y}{(xy)^{5/2}}\right| \leq \frac{3}{8}\frac{11^3}{9^5}10^2$$

$$|f_{yyy}(x,y)| = \left|\frac{3}{8}\frac{x^3}{(xy)^{5/2}}\right| \leq \frac{3}{8}\frac{11^3}{9^5}10^2 = M$$

Solução Q1-(d)

$$|E(x,y)| \leq \frac{4}{3}10^{-3}M$$

$$|E(x,y)| \leq \frac{4}{3}10^{-3}\frac{3}{8}\frac{11^3}{9^5}10^2 = \frac{1}{2}\frac{11^3}{9^5}10^{-1} < \frac{1}{2}\frac{2000}{10.000}10^{-1} = 10^{-2},$$

quando $(x,y) \in R$.

0,01

——————//——————//——————//——————//———

$(1.08, 0.95) \in R$

$P_2(1.08, 0.95) = 1.006950000$ $\quad$ $f(1.08, 0.95) = 1.01291658097$

Gráficos

Questão 2

Questão 2: *Determine se a função* $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$ *possui máximos e mínimos locais e absolutos em* $\mathbb{R}^2$*.*

Solução:

Os pontos críticos da função f são dados por

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

Questão 2

Questão 2: *Determine se a função* $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$ *possui máximos e mínimos locais e absolutos em* $\mathbb{R}^2$*.*

Solução:
Os pontos críticos da função f são dados por

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

As soluções do sistema são: $x = -1, 0, 1$ e $y = -1, 0, 1$, ou seja, temos nove pontos críticos: $(0,0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, \pm 1)$.
Para determinar a natureza dos pontos críticos aplicamos o teste da derivada de segunda ordem (Teste da Hessiana).

Solução Q2

Temos

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

- No ponto $(0,0)$,

Solução Q2

Temos

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

- No ponto $(0,0)$, temos $det(H(0,0)) > 0$ e $f_{xx}(0,0) < 0$. Então $(0,0)$ é um máximo local.

Solução Q2

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

- Nos pontos $(0,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$

Solução Q2

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

- Nos pontos $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ temos $det(H(0, \pm 1)) < 0$ e $det(H(\pm 1, 0)) < 0$. Então os pontos são pontos de sela.

- Nos pontos $(\pm 1, \pm 1)$

Solução Q2

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

- Nos pontos $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ temos $det(H(0, \pm 1)) < 0$ e $det(H(\pm 1, 0)) < 0$. Então os pontos são pontos de sela.

- Nos pontos $(\pm 1, \pm 1)$

Solução Q2

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

- Nos pontos $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ temos $det(H(0, \pm 1)) < 0$ e $det(H(\pm 1, 0)) < 0$. Então os pontos são pontos de sela.

- Nos pontos $(\pm 1, \pm 1)$ temos $det(H(\pm 1, \pm 1)) > 0$ e $f_{xx}(\pm 1, \pm 1) > 0$. Então os pontos são mínimos locais.

Solução Q2

- $(0,0)$ é ponto de máximo local
- $(0,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ são pontos sela
- $(1,\pm 1)$ e $(-1,\pm 1)$ são pontos de mínimos locais

Observe que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = \underbrace{(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2}_{\geq 0} - 2 \geq -2 = f(\pm 1, \pm 1).$$

Portanto, os pontos $(\pm 1, \pm 1)$ são mínimos absolutos de f.

Solução Q2

- $(0, 0)$ é ponto de máximo local
- $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ são pontos sela
- $(1, \pm 1)$ e $(-1, \pm 1)$ são pontos de mínimos locais

A função f não tem valor máximo absoluto pois um ponto de máximo absoluto seria um ponto de máximo local e, por exemplo, $f(2, 1) = 7 > 0 = f(0, 0)$.