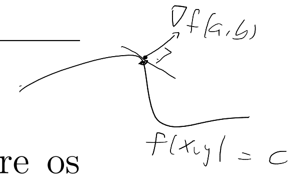
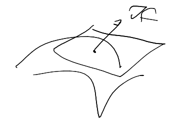
Semana 10 (16-20/11, 2020): Derivada direcional e importância do gradiente.

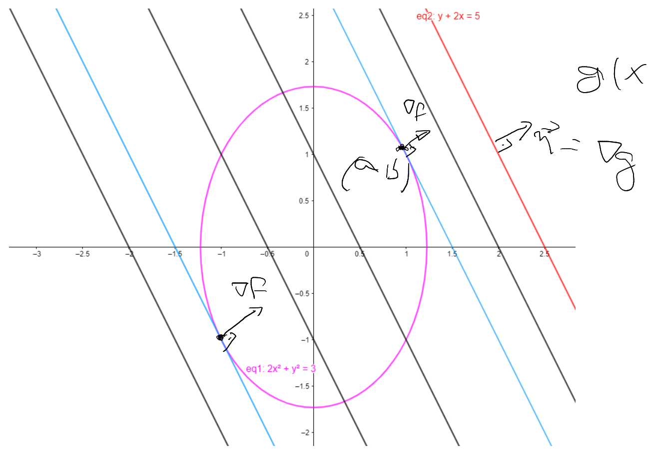


1. Considere a curva $f(x,y) = 3$ com $f(x,y) = 2x^2 + y^2$. Encontre os pontos desta curva onde a reta tangente é paralela à reta $y + 2x = 5$.



$2x^2+y^2=3$

$\frac{x^2}{3/2}+\frac{y^2}{3}=1$



$g(x,y) = y+2x = 5$

Geogebra

$\nabla f(x,y) = m\nabla g(x,y)$

$(4x, 2y) = m(2,1) \iff$

$\iff \begin{cases} 4x = m2 \\ 2y = m1 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 2x \\ m = 2y \end{cases} \iff$

$\iff 2x = 2y \iff \boxed{x=y}$

$(x,y) \in$ elipse $\therefore 2x^2+y^2=3$

Como $x=y \Rightarrow 2x^2+x^2=3$

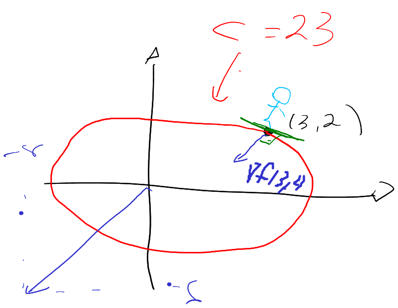
$3x^2=3$

$\boxed{x=\pm 1}$

$\therefore$ os pontos da elipse onde as retas tg são paralelas a reta dada são: $(1,1)$ e $(-1,-1)$

2. Suponha que $T(x,y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. (Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em ${}^0C$.) Um indivíduo encontra-se na posição $(3,2)$ e pretende dar um passeio.

   (a) Descreva o lugar geométrico que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto $(3,2)$.



$$T(3,2) = 40 - 9 - 8 = 23$$

$$40 - x^2 - 2y^2 = 23$$

$$x^2 + 2y^2 = 17$$

$$\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{\frac{17}{2}} = 1$$

   (b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

$$D_u f = \|\nabla f\| \|u\| \cos\theta$$

$$\theta = \angle(\nabla f, u)$$

$$\theta = 0$$

do vetor $\nabla T(3,2)$

$$\nabla T(x,y) = (-2x, -4y)$$

$$\nabla T(3,2) = (-6, -8)$$

$$T(x,y) = 40 - x^2 - 2y^2$$ diferenciável

(c) De quanto a temperatura se elevará aproximadamente caso caminhe 0.01 km na direção encontrada no item (b)?

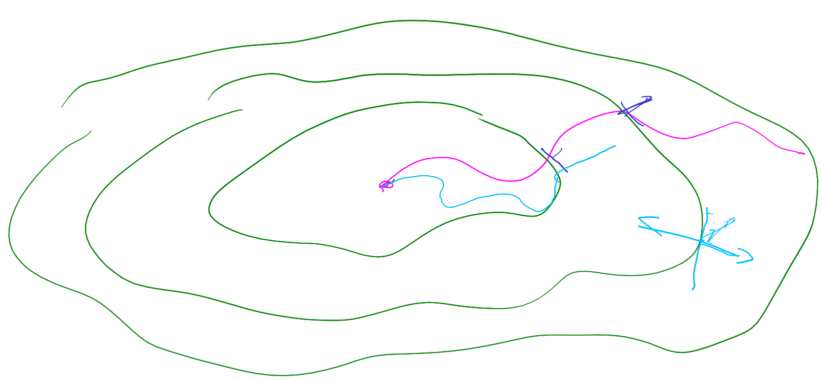
$\vec{v} = \nabla T(3,2) = (-6, -8)$ $\quad \vec{u} = \dfrac{\nabla T(3,2)}{\|\nabla T(3,2)\|}$

$$D_u T(3,2) = \nabla T(3,2) \cdot \vec{u} = \nabla T(3,2) \cdot \frac{\nabla T(3,2)}{\|\nabla T(3,2)\|}$$

$$= \frac{\|\nabla T(3,2)\|^2}{\|\nabla T(3,2)\|} = \|\nabla T(3,2)\| = \sqrt{36+64} = 10 \,{}^{\circ}/\text{km}$$

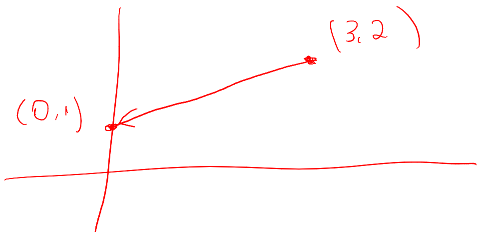
Na direção de $\vec{u}$ a temp. ~~varia~~ aumenta de $10^{\circ}C$ por km

a temperatura se elevará de $(0{,}01) \times 10 = 0{,}1^{\circ}$



$$T(x,y) = 40 - x^2 - 2y^2 \quad \text{é } \underline{\text{Dif.}}$$

(d) Calcule a derivada direcional de T em $(3,2)$ na direção do ponto $(3,2)$ ao ponto $(0,1)$.



$$\vec{v} = (0,1) - (3,2) = (-3,-1) = -3\vec{i} - \vec{j}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,-1)$$

$$D_{\vec{u}}T(3,2) = \nabla T(3,2)\cdot\vec{u} = (-6,-8)\cdot\frac{(-3,-1)}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}(18+8) = \frac{26}{\sqrt{10}}\ {}^{o}C/km$$

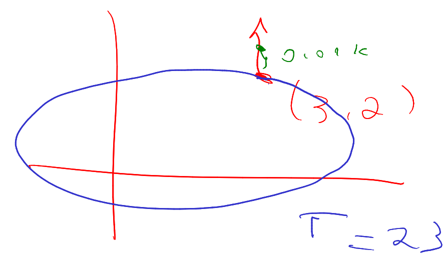
$T_y(x,y) = -4y$

$$T(x,y) = 40 - x^2 - 2y^2$$

(e) De quanto decrescerá aproximadamente a temperatura caso caminhe 0.01 km na direção $\vec{j}$.

$$D_{\vec{j}} T(3,2) = \frac{\partial T}{\partial y}(3,2) = -8 \ {}^{\circ}C/km$$

na direção de $\vec{j}$ a temperatura decresce de 8°C por km



$(0,01) \times 8 = 0,08\ {}^{\circ}C$