Regra da cadeia, plano tangente, derivada implícita

Ana Claudia Nabarro, Ana Paula Peron, Farid Tari

Aula de Consolidação, Cálculo 2, 2020

Questão 1

Questão 1

Questão 1: *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = xy + e^x$. Seja g uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $g(u, v) = f(u + v, u - v)$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial g}{\partial v}$ usando a regra da cadeia.*

Questão 1: *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = xy + e^x$. Seja g uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $g(u,v) = f(u+v, u-v)$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial g}{\partial v}$ usando a regra da cadeia.*

Solução:
Pela regra da cadeia

Questão 1

Questão 1: *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = xy + e^x$. Seja g uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $g(u,v) = f(u+v, u-v)$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial g}{\partial v}$ usando a regra da cadeia.*

Solução:
Pela regra da cadeia

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

Questão 1

Questão 1: *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = xy + e^x$. Seja g uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $g(u,v) = f(u+v, u-v)$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial g}{\partial v}$ usando a regra da cadeia.*

Solução:
Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)
\end{aligned}$$

Questão 1: *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = xy + e^x$. Seja g uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $g(u,v) = f(u+v, u-v)$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial g}{\partial v}$ usando a regra da cadeia.*

Solução:
Pela regra da cadeia

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & = & \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) & = & \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{array}$$

(Na forma matricial: $\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$)

Solução da Q1

Solução da Q1

Para $f(x, y) = xy + e^x$, $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = u - v$,

Solução da Q1

Para $f(x,y) = xy + e^x$, $x(u,v) = u + v$, $y(u,v) = u - v$, temos

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y + e^x, & \dfrac{\partial f}{\partial y} = x, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} = 1, & \dfrac{\partial x}{\partial v} = 1, \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = 1, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = -1. \end{array}$$

Solução da Q1

Para $f(x, y) = xy + e^x$, $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = u - v$, temos

$$\begin{array}{cc}
\frac{\partial f}{\partial x} = y + e^x, & \frac{\partial f}{\partial y} = x, \\
\frac{\partial x}{\partial u} = 1, & \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \\
\frac{\partial y}{\partial u} = 1, & \frac{\partial y}{\partial v} = -1.
\end{array}$$

Portanto

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v + e^{u+v} & u + v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solução da Q1

Para $f(x,y) = xy + e^x$, $x(u,v) = u + v$, $y(u,v) = u - v$, temos

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} = y + e^x, & \frac{\partial f}{\partial y} = x, \\ \frac{\partial x}{\partial u} = 1, & \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \\ \frac{\partial y}{\partial u} = 1, & \frac{\partial y}{\partial v} = -1. \end{array}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u - v + e^{u+v} & u + v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u + e^{u+v} \\ -2v + e^{u+v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Questão 2

Questão 2: *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por* $f(x, y) = 2xy - 3y^2$.

(a) *Encontre o gradiente de f no ponto $p = (-1, -1)$.*

(b) *Encontre a equação do plano tangente a superfície $z = f(x, y)$ no ponto p.*

(c) *Encontre equações paramétricas da reta normal a superfície $z = f(x, y)$ no ponto p.*

Questão 2

Questão 2: *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por* $f(x, y) = 2xy - 3y^2$.

(a) *Encontre o gradiente de f no ponto $p = (-1, -1)$.*

(b) *Encontre a equação do plano tangente a superfície $z = f(x, y)$ no ponto p.*

(c) *Encontre equações paramétricas da reta normal a superfície $z = f(x, y)$ no ponto p.*

Solução:

(a) Por definição, $\nabla f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b))$.

Questão 2: *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = 2xy - 3y^2$.*

(a) *Encontre o gradiente de f no ponto $p = (-1,-1)$.*

(b) *Encontre a equação do plano tangente a superfície $z = f(x,y)$ no ponto p.*

(c) *Encontre equações paramétricas da reta normal a superfície $z = f(x,y)$ no ponto p.*

Solução:
(a) Por definição, $\nabla f(a,b) = (f_x(a,b), f_y(a,b))$. Temos $f_x(x,y) = 2y$ e $f_y(x,y) = 2x - 6y$.

Questão 2: *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$ por* $f(x,y) = 2xy - 3y^2$.

(a) *Encontre o gradiente de f no ponto $p = (-1,-1)$.*

(b) *Encontre a equação do plano tangente a superfície $z = f(x,y)$ no ponto p.*

(c) *Encontre equações paramétricas da reta normal a superfície $z = f(x,y)$ no ponto p.*

Solução:
(a) Por definição, $\nabla f(a,b) = (f_x(a,b), f_y(a,b))$. Temos $f_x(x,y) = 2y$ e $f_y(x,y) = 2x - 6y$.
Logo

$$\nabla f(-1,-1) = (-2,4).$$

Solução da Q2

Solução da Q2

(b) O gráfico da função f é o nível 0 da função $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, pois

$$z = f(z, y) \iff F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Solução da Q2

(b) O gráfico da função f é o nível 0 da função $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, pois

$$z = f(z, y) \iff F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Temos $\nabla F(a, b, f(a, b)) = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ e $f(-1, -1) = -1$.

Solução da Q2

(b) O gráfico da função f é o nível 0 da função $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, pois

$$z = f(z, y) \iff F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Temos $\nabla F(a, b, f(a, b)) = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ e $f(-1, -1) = -1$. Daí $\nabla F(-1, -1, -1) = (-2, 4, -1)$.

Solução da Q2

(b) O gráfico da função f é o nível 0 da função $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, pois

$$z = f(z, y) \iff F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Temos $\nabla F(a, b, f(a, b)) = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ e $f(-1, -1) = -1$. Daí $\nabla F(-1, -1, -1) = (-2, 4, -1)$.
A equação do plano tangente a superfície de nível $F(x, y, z) = 0$ é

$$\nabla F(-1, -1, -1) \cdot (x + 1, y + 1, z + 1) = 0,$$

Solução da Q2

(b) O gráfico da função f é o nível 0 da função $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, pois

$$z = f(z, y) \iff F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Temos $\nabla F(a, b, f(a, b)) = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ e $f(-1, -1) = -1$. Daí $\nabla F(-1, -1, -1) = (-2, 4, -1)$.
A equação do plano tangente a superfície de nível $F(x, y, z) = 0$ é

$$\begin{aligned} & \nabla F(-1,-1,-1) \cdot (x+1, y+1, z+1) = 0, \\ \iff & \qquad (-2, 4, -1) \cdot (x+1, y+1, z+1) = 0, \end{aligned}$$

Solução da Q2

(b) O gráfico da função f é o nível 0 da função $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, pois

$$z = f(z, y) \iff F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Temos $\nabla F(a, b, f(a, b)) = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ e $f(-1, -1) = -1$. Daí $\nabla F(-1, -1, -1) = (-2, 4, -1)$.
A equação do plano tangente a superfície de nível $F(x, y, z) = 0$ é

$$\begin{aligned} & \nabla F(-1,-1,-1) \cdot (x+1, y+1, z+1) = 0, \\ \iff & (-2, 4, -1) \cdot (x+1, y+1, z+1) = 0, \\ \iff & -2x + 4y - z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Solução da Q2

(b) O gráfico da função f é o nível 0 da função $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, pois

$$z = f(z, y) \iff F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Temos $\nabla F(a, b, f(a, b)) = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ e $f(-1, -1) = -1$. Daí $\nabla F(-1, -1, -1) = (-2, 4, -1)$.
A equação do plano tangente a superfície de nível $F(x, y, z) = 0$ é

$$\begin{aligned}
& \nabla F(-1,-1,-1) \cdot (x+1, y+1, z+1) = 0, \\
\iff & (-2, 4, -1) \cdot (x+1, y+1, z+1) = 0, \\
\iff & -2x + 4y - z + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Podem usar também a fórmula
$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - a)$, que da
$z = 1 - 2(x - 1) + 4(y - 1) = -1 - 2x + 4y$.

Solução da Q2

Solução da Q2

(c) O vetor $\nabla F(-1,-1,-1) = (-2,4,-1)$ é um vetor diretor da reta normal a superfície $F = 0$ no ponto $(-1,-1,-1)$.

Solução da Q2

(c) O vetor $\nabla F(-1,-1,-1) = (-2,4,-1)$ é um vetor diretor da reta normal a superfície $F = 0$ no ponto $(-1,-1,-1)$.
Logo, as equações paramétricas da reta normal a superfície $z = f(x,y)$ são

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1-2t \\ y & = & -1+4t \\ z & = & -1-t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Questão 3

A equação $f(x,y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2 - (x^2 + y^2) = 0$ define uma curva no plano chamada "limaçon".

(a) A equação $f(x,y) = 0$ define implicitamente uma função diferenciável $y = g(x)$ no ponto $(0,1)$?
Se sim, calcule $\frac{dy}{dx}$ no ponto $x = 0$.

(b) A equação $f(x,y) = 0$ define implicitamente uma função diferenciável $y = g(x)$ no ponto $(-1,0)$?
Se não, a equação $f(x,y) = 0$ define implicitamente uma função diferenciável $x = h(y)$ no ponto $(-1,0)$?

(c) Porque a equação $f(x,y) = 0$ não define implicitamente nem uma função diferenciável $y = g(x)$ e nem uma função diferenciável $x = h(y)$ no ponto $(0,0)$?

Questão 3

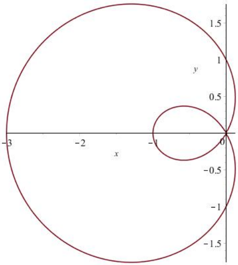


Figura: Limaçon ou caracol de Pascal.

Solução da Q3

Solução da Q3

(a) Calculando as derivada parciais de $f(x,y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2 - (x^2 + y^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(2x+2)(x^2+y^2+2x) - 2x \\ f_y(x,y) &= 4y(x^2+y^2+2x) - 2y \end{aligned}$$

Solução da Q3

(a) Calculando as derivada parciais de
$f(x, y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2 - (x^2 + y^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2(2x + 2)(x^2 + y^2 + 2x) - 2x \\ f_y(x, y) &= 4y(x^2 + y^2 + 2x) - 2y \end{aligned}$$

Observe que o ponto $p = (0, 1)$ pertence a limaçon, pois
$f(0, 1) = 0$.

Solução da Q3

(a) Calculando as derivada parciais de $f(x,y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2 - (x^2 + y^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(2x+2)(x^2+y^2+2x) - 2x \\ f_y(x,y) &= 4y(x^2+y^2+2x) - 2y \end{aligned}$$

Observe que o ponto $p = (0,1)$ pertence a limaçon, pois $f(0,1) = 0$.
Temos $f_y(0,1) = 2 \neq 0$.

Solução da Q3

(a) Calculando as derivada parciais de
$f(x, y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2 - (x^2 + y^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2(2x + 2)(x^2 + y^2 + 2x) - 2x \\ f_y(x, y) &= 4y(x^2 + y^2 + 2x) - 2y \end{aligned}$$

Observe que o ponto $p = (0, 1)$ pertence a limaçon, pois
$f(0, 1) = 0$.
Temos $f_y(0, 1) = 2 \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Implícita, existe um intervalo I que contem $x_0 = 0$, un intervalo J que contem $y_0 = 1$ e uma única função diferenciável $g : I \to J$ tal que para $(x, y) \in I \times J$

$$f(x, y) = 0 \iff y = g(x).$$

Solução da Q3

(a) Calculando as derivada parciais de
$f(x,y) = (x^2+y^2+2x)^2 - (x^2+y^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(2x+2)(x^2+y^2+2x) - 2x \\ f_y(x,y) &= 4y(x^2+y^2+2x) - 2y \end{aligned}$$

Observe que o ponto $p = (0,1)$ pertence a limaçon, pois $f(0,1) = 0$.
Temos $f_y(0,1) = 2 \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Implícita, existe um intervalo I que contem $x_0 = 0$, un intervalo J que contem $y_0 = 1$ e uma única função diferenciável $g : I \to J$ tal que para $(x,y) \in I \times J$

$$f(x,y) = 0 \iff y = g(x).$$

Isto significa que, em torno do ponto $(0,1)$, a curva limação é o gráfico da função $y = g(x)$.

Solução da Q3

(a) Calculando as derivada parciais de
$f(x,y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2 - (x^2 + y^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(2x+2)(x^2+y^2+2x) - 2x \\ f_y(x,y) &= 4y(x^2+y^2+2x) - 2y \end{aligned}$$

Observe que o ponto $p = (0,1)$ pertence a limaçon, pois $f(0,1) = 0$.
Temos $f_y(0,1) = 2 \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Implícita, existe um intervalo I que contem $x_0 = 0$, un intervalo J que contem $y_0 = 1$ e uma única função diferenciável $g : I \to J$ tal que para $(x,y) \in I \times J$

$$f(x,y) = 0 \iff y = g(x).$$

Isto significa que, em torno do ponto $(0,1)$, a curva limação é o gráfico da função $y = g(x)$.
Qual é o intervalo máximo I onde g pode ser definida?

Solução da Q3

Qual é o intervalo máximo I onde g pode ser definida?

Solução da Q3

Qual é o intervalo máximo I onde g pode ser definida?

Precisamos achar os pontos da curva
$f(x, y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2 - (x^2 + y^2) = 0$ onde $f_y(x, y) = 0$.

Solução da Q3

Qual é o intervalo máximo I onde g pode ser definida?

Precisamos achar os pontos da curva $f(x,y) = (x^2+y^2+2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$ onde $f_y(x,y) = 0$.

Temos $f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+2x) - 2y = 2y(2(x^2+y^2+2x) - 1) = 0$.

Solução da Q3

Qual é o intervalo máximo I onde g pode ser definida?
Precisamos achar os pontos da curva
$f(x,y) = (x^2+y^2+2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$ onde $f_y(x,y) = 0$.
Temos
$f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+2x) - 2y = 2y(2(x^2+y^2+2x)-1) = 0$.
Para $y = 0$ temos $f(x,0) = x^2(x+3)(x+1)$, portanto
$x = -3, -1$ ou 0.

Solução da Q3

Qual é o intervalo máximo I onde g pode ser definida?

Precisamos achar os pontos da curva
$f(x, y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2 - (x^2 + y^2) = 0$ onde $f_y(x, y) = 0$.
Temos
$f_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2 + 2x) - 2y = 2y(2(x^2 + y^2 + 2x) - 1) = 0.$
Para $y = 0$ temos $f(x, 0) = x^2(x + 3)(x + 1)$, portanto
$x = -3, -1$ ou 0.
Para $y \neq 0$, $f_y(x, y) = 0 \iff (x^2 + y^2 + 2x) = 1/2$.

Solução da Q3

Qual é o intervalo máximo I onde g pode ser definida?

Precisamos achar os pontos da curva
$f(x,y) = (x^2+y^2+2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$ onde $f_y(x,y) = 0$.
Temos
$f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+2x) - 2y = 2y(2(x^2+y^2+2x)-1) = 0$.
Para $y = 0$ temos $f(x,0) = x^2(x+3)(x+1)$, portanto
$x = -3, -1$ ou 0.
Para $y \neq 0$, $f_y(x,y) = 0 \iff (x^2+y^2+2x) = 1/2$. Substituindo em $f = 0$, obtemos $x^2+y^2-1/4 = 0$.

Solução da Q3

Qual é o intervalo máximo I onde g pode ser definida?

Precisamos achar os pontos da curva
$f(x,y) = (x^2+y^2+2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$ onde $f_y(x,y) = 0$.
Temos
$f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+2x) - 2y = 2y(2(x^2+y^2+2x)-1) = 0$.
Para $y = 0$ temos $f(x,0) = x^2(x+3)(x+1)$, portanto
$x = -3, -1$ ou 0.
Para $y \neq 0$, $f_y(x,y) = 0 \iff (x^2+y^2+2x) = 1/2$. Substituindo em $f = 0$, obtemos $x^2+y^2-1/4 = 0$.
Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2+2x)-1 & = & 0 \\ x^2+y^2-\frac{1}{4} & = & 0 \end{cases}$$

obtemos $x = \frac{1}{8}$.

Solução da Q3

Qual é o intervalo máximo I onde g pode ser definida?

Precisamos achar os pontos da curva $f(x,y) = (x^2+y^2+2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$ onde $f_y(x,y) = 0$.

Temos $f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+2x) - 2y = 2y(2(x^2+y^2+2x)-1) = 0$.

Para $y = 0$ temos $f(x,0) = x^2(x+3)(x+1)$, portanto $x = -3, -1$ ou 0.

Para $y \neq 0$, $f_y(x,y) = 0 \iff (x^2+y^2+2x) = 1/2$. Substituindo em $f = 0$, obtemos $x^2+y^2-1/4 = 0$.

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2+2x)-1 & = & 0 \\ x^2+y^2-\frac{1}{4} & = & 0 \end{cases}$$

obtemos $x = \frac{1}{8}$. (Daí $y = \pm\sqrt{15}/8$.)

Solução da Q3

Qual é o intervalo máximo I onde g pode ser definida?
Precisamos achar os pontos da curva
$f(x, y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2 - (x^2 + y^2) = 0$ onde $f_y(x, y) = 0$.
Temos
$f_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2 + 2x) - 2y = 2y(2(x^2 + y^2 + 2x) - 1) = 0$.
Para $y = 0$ temos $f(x, 0) = x^2(x + 3)(x + 1)$, portanto
$x = -3, -1$ ou 0.
Para $y \neq 0$, $f_y(x, y) = 0 \iff (x^2 + y^2 + 2x) = 1/2$. Substituindo em $f = 0$, obtemos $x^2 + y^2 - 1/4 = 0$.
Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2 + 2x) - 1 & = & 0 \\ x^2 + y^2 - \frac{1}{4} & = & 0 \end{cases}$$

obtemos $x = \frac{1}{8}$. (Daí $y = \pm\sqrt{15}/8$.)
Portanto, o intervalo máximo de definição da função g é

$$I = (-3, \frac{1}{8}).$$

Solução da Q3

Solução da Q3

Temos, para $x \in I$,
$f(x, g(x)) = 0$

Solução da Q3

Temos, para $x \in I$,
$f(x, g(x)) = 0 \implies f_x(x, g(x)) + g'(x) f_y(x, g(x)) = 0.$

Solução da Q3

Temos, para $x \in I$,
$f(x, g(x)) = 0 \implies f_x(x, g(x)) + g'(x)f_y(x, g(x)) = 0.$
Como $f_y(x, g(x)) \neq 0$ para $x \in I$,

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}.$$

Solução da Q3

Temos, para $x \in I$,
$f(x, g(x)) = 0 \implies f_x(x, g(x)) + g'(x) f_y(x, g(x)) = 0.$
Como $f_y(x, g(x)) \neq 0$ para $x \in I$,

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}.$$

No ponto $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $f_x(0, 1) = 4$ e $f_y(0, 1) = 2$.

Solução da Q3

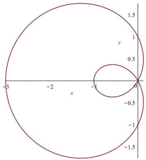
Temos, para $x \in I$,
$f(x, g(x)) = 0 \implies f_x(x, g(x)) + g'(x) f_y(x, g(x)) = 0.$
Como $f_y(x, g(x)) \neq 0$ para $x \in I$,

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}.$$

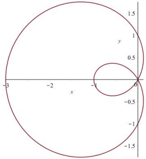
No ponto $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $f_x(0, 1) = 4$ e $f_y(0, 1) = 2$.
Daí

$$g'(0) = \frac{dy}{dx}(0) = -\frac{4}{2} = -2.$$

Solução da Q3

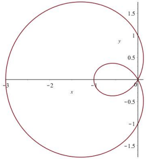


Solução da Q3



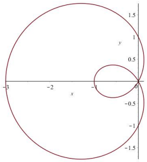
(b) No ponto $p = (-1, 0)$, $f_y(-1, 0) = 0$.

Solução da Q3



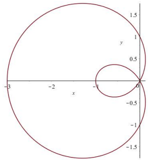
(b) No ponto $p = (-1, 0)$, $f_y(-1, 0) = 0$. Então a equação $f(x, y) = 0$ pode não definir implicitamente uma função diferenciável $y = g(x)$ no ponto $(-1, 0)$.

Solução da Q3



(b) No ponto $p = (-1, 0)$, $f_y(-1, 0) = 0$. Então a equação $f(x, y) = 0$ pode não definir implicitamente uma função diferenciável $y = g(x)$ no ponto $(-1, 0)$.
A reta tangente a curva $f(x, y) = 0$ é vertical no ponto $(-1, 0)$, então a curva não pode ser o gráfico de uma função diferenciável $y = g(x)$.

Solução da Q3



(b) No ponto $p = (-1, 0)$, $f_y(-1, 0) = 0$. Então a equação $f(x, y) = 0$ pode não definir implicitamente uma função diferenciável $y = g(x)$ no ponto $(-1, 0)$.
A reta tangente a curva $f(x, y) = 0$ é vertical no ponto $(-1, 0)$, então a curva não pode ser o gráfico de uma função diferenciável $y = g(x)$.
Mas $f_x(-1, 0) = 2$, então a equação $f(x, y) = 0$ define implicitamente uma função diferenciável $x = h(y)$ no ponto $(-1, 0)$.

Solução da Q3

Solução da Q3

(c) No ponto $p = (0, 0)$, temos $f_x(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = 0$.

Solução da Q3

(c) No ponto $p = (0,0)$, temos $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$. Então a equação $f(x,y) = 0$ pode não definir implicitamente nem uma função diferenciável $y = g(x)$ e nem uma função diferenciável $x = h(y)$ no ponto $(0,0)$.

Solução da Q3

Solução da Q3

O ponto $(0,0)$ **é uma singularidade de** f pois $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Solução da Q3

O ponto $(0,0)$ **é uma singularidade de** f pois
$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
Podemos escrever, en torno do ponto $(0,0)$,

$$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + \text{termos de ordem maior.}$$

Solução da Q3

O ponto $(0,0)$ **é uma singularidade de** f pois
$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
Podemos escrever, en torno do ponto $(0,0)$,

$$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + \text{termos de ordem maior}.$$

Considerando $g(x,y) = 3x^2 - y^2$, temos $(g_{xy}^2 - g_{xx}g_{yy})(0,0) \neq 0$.

Solução da Q3

O ponto $(0,0)$ **é uma singularidade de** f pois $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
Podemos escrever, en torno do ponto $(0,0)$,

$$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + \text{termos de ordem maior.}$$

Considerando $g(x,y) = 3x^2 - y^2$, temos $(g_{xy}^2 - g_{xx}g_{yy})(0,0) \neq 0$.
Com isso, podemos afirmar que o comportamento de $f(x,y) = 0$ é similar ao de $g(x,y) = 3x^2 - y^2 = 0$ [**Teorema de Morse**].

Solução da Q3

O ponto $(0,0)$ **é uma singularidade de** f pois $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
Podemos escrever, en torno do ponto $(0,0)$,

$$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + \text{termos de ordem maior.}$$

Considerando $g(x,y) = 3x^2 - y^2$, temos $(g_{xy}^2 - g_{xx}g_{yy})(0,0) \neq 0$.
Com isso, podemos afirmar que o comportamento de $f(x,y) = 0$ é similar ao de $g(x,y) = 3x^2 - y^2 = 0$ [**Teorema de Morse**].
Como $g(x,y) = 0$ é a união de duas retas transversais, podemos afirmar que $f(x,y) = 0$ é também a união de duas curvas transversais em torno do ponto $(0,0)$.
E se $(g_{xy}^2 - g_{xx}g_{yy})(0,0) \neq 0$???

Solução da Q3

O ponto $(0,0)$ **é uma singularidade de** f pois $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
Podemos escrever, en torno do ponto $(0,0)$,

$$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + \text{termos de ordem maior.}$$

Considerando $g(x,y) = 3x^2 - y^2$, temos $(g_{xy}^2 - g_{xx}g_{yy})(0,0) \neq 0$.
Com isso, podemos afirmar que o comportamento de $f(x,y) = 0$ é similar ao de $g(x,y) = 3x^2 - y^2 = 0$ [**Teorema de Morse**].
Como $g(x,y) = 0$ é a união de duas retas transversais, podemos afirmar que $f(x,y) = 0$ é também a união de duas curvas transversais em torno do ponto $(0,0)$.
E se $(g_{xy}^2 - g_{xx}g_{yy})(0,0) \neq 0$???
Quais são os termos de grau maior que influenciam na configuração de $f(x,y) = 0$?

Solução da Q3

O ponto $(0,0)$ **é uma singularidade de f** pois
$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
Podemos escrever, en torno do ponto $(0,0)$,

$$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + \text{termos de ordem maior}.$$

Considerando $g(x,y) = 3x^2 - y^2$, temos $(g_{xy}^2 - g_{xx}g_{yy})(0,0) \neq 0$.
Com isso, podemos afirmar que o comportamento de $f(x,y) = 0$ é similar ao de $g(x,y) = 3x^2 - y^2 = 0$ [**Teorema de Morse**].
Como $g(x,y) = 0$ é a união de duas retas transversais, podemos afirmar que $f(x,y) = 0$ é também a união de duas curvas transversais em torno do ponto $(0,0)$.
E se $(g_{xy}^2 - g_{xx}g_{yy})(0,0) \neq 0$???
Quais são os termos de grau maior que influenciam na configuração de $f(x,y) = 0$?
Bem vindos a Teoria de Singularidades!