Continuidade e Diferenciabilidade

Ana Claudia Nabarro, Ana Paula Peron, Farid Tari

Aula de Consolidação, Cálculo 2, 2020

Questão 1: *Em que pontos* (x, y) *no plano a função* $g(x, y) = \operatorname{sen}(\frac{1}{xy})$ *é contínua?*

Solução:
A função g é a composta de três funções: $g_1(x, y) = xy$, $g_2(u) = \frac{1}{u}$, $g_3(t) = \operatorname{sen}(t)$:

$$g(x, y) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x, y).$$

As funções g_1, g_2, g_3 são contínuas no seus domínios de definição. Portanto, g é contínua nos seu domínio de definição

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}.$$

Questão 2

Questão 2: *A função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável no ponto $(0,0)$*?*

Solução:
Vimos na aula que a função f não é contínua em $(0,0)$ (basta considerar o limite de f ao longo dos caminhos $C_1 : x = 0$ e $C_2 : x = y$). Portanto f não é diferenciável no ponto $(0,0)$, pois

diferenciabilidade $\Longrightarrow$ **continuidade.**

Questão 3

Questão 3: *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) *Mostre que f é contínua em $(0,0)$.*

(b) *Prove que $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 0$ mas que f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$.*

(c) *A função f é diferenciável em $(0,0)$?*

Solução Q3

(a) Precisamos mostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |\frac{x^3}{x^2+y^2}| = |x\frac{x^2}{x^2+y^2}| \leq |x|.$$

Portanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, ou seja, f é contínua no ponto $(0,0)$.

Solução Q3

(b) Temos

$$
\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{h^3}{h^2}\right)}{h} = 1 \\
f_y(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0
\end{aligned}
$$

Solução Q3

Portanto

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$f_y(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução Q3

Para

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ não existe. (Basta considerar os caminhos $C_1 : x = 0$ e $C_2 : x = 2y$.) Portanto f_x não é contínua em $(0,0)$.

Para

$$f_y(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

usando caminhos distintos, mostramos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\dfrac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$ não existe. Portanto f_y não é contínua em $(0,0)$.

Solução Q3

(c) O fato que f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$ não nos permite concluir que f não é diferenciável em $(0,0)$!
Precisamos usar a definição...
No ponto $(a,b)=(0,0)$,

$$L(h,k)=f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k=h.$$

Portanto,

$$E(h,k)=f(a+h,b+k)-L(h,k)=\frac{h^3}{h^2+k^2}-h=-\frac{hk^2}{h^2+k^2}.$$

Agora $\frac{E(h,k)}{||(h,k)||}=-\frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$. Portanto, $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E(h,k)}{||(h,k)||}$ não existe. Logo f não é diferenciável em $(0,0)$.

Questão 4: *Determine o conjunto dos pontos no plano onde* $f(x,y) = x + \ln(\frac{1}{x^2+y^2})$ *é diferenciável.*

Solução:
A função $f_1(x,y) = x$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
A função $f_2(x,y) = \ln(\frac{1}{x^2+y^2})$ é a composta da função $\ln(u)$, que é diferenciável em $(0,+\infty)$, com a função $\frac{1}{x^2+y^2}$, que é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Portanto, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Questão 5: *Seja* $w = e^x + x\ln(1 + y^2 + x^4) + \cosh(y + e^{\sqrt{1+x^2y^2}})$. *É verdade que* $w_{xy} = w_{yx}$*?*

Solução:
A função w possui derivadas parciais contínuas de toda ordem. Segue, pelo Teorema de Schwarz (Teorema das derivadas mistas), $w_{xy} = w_{yx}$.

Questão 6

Questão 6: *Mostre que a função* $T(t,x) = e^{-4t}\text{sen}(2x)$ *satisfaz a equação do calor* $T_t = T_{xx}$.

Solução:
Temos $T_t(x,y) = -4e^{-4t}\text{sen}(2x)$, $T_x(x,y) = 2e^{-4t}\cos(2x)$ e $T_{xx}(x,y) = -4e^{-4t}\text{sen}(2x)$. Portanto, $T_t = T_{xx}$.