Domínios, limites, derivadas parciais

Ana Claudia Nabarro, Ana Paula Peron, Farid Tari

Aula de Consolidação, Cálculo 2, 2020

Questão 1: *Determine o domínio, imagem, esboce curvas de nível e faça um esboço do gráfico de* $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Solução:
A função $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ é definida quando $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja, quando $x^2 + y^2 \leq 4$.
Então o domínio D_f da função f:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

é o disco fechado em $\mathbb{R}^2$ de centro $(0, 0)$ e raio 2.

Solução Q1

A imagem de f é

$$Im(f) = \{k \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in D_f \text{ tal que } f(x,y) = k\}.$$

Temos $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = k \implies k \geq 0$.
Segue também que

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = k \implies 4 - x^2 - y^2 = k^2 \implies 4 - k^2 = x^2 + y^2.$$

Portanto

$$k \in Im(f) \iff k \geq 0 \text{ e } 4 - k^2 \geq 0,$$

ou seja, $0 \leq k \leq 2$. Concluímos que $Im(f) = [0,2]$.

Solução Q1

O conjunto de nível k de f é o conjunto

$$N_k = \{(x, y) \in D_f : f(x, y) = k\}.$$

Então se $k \notin [0, 2]$, $N_k = \emptyset$.
Para $k \in [0, 2]$, vimos que $f(x, y) = k \iff x^2 + y^2 = 4 - k^2$.
Portanto, N_k é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{4 - k^2}$ se $0 \leq k < 2$, e $N_2 = \{(0, 0)\}$.

Solução Q1

O gráfico de $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ é o conjunto

$$graf(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_f \text{ e } z = f(x,y)\}.$$

Temos
$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = z \implies 4 - x^2 - y^2 = z^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 4.$
Como $z \geq 0$, o gráfico de f é a parte da esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 2 contida no semi-espaço $z \geq 0$.

Questão 2: *Determine se os limites existem, se sim, calcule.*

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{-y/x}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,1)} (y-1)e^{\cos(y/x)}$
4. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} (y-1)e^{\cos(x^2+y^2)}\cosh(x+\ln(1+x^2+y^2))$

Solução Q2 (a)

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$. Escrevemos $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$.
Considere os caminhos $C_1 : x = 0$ e $C_2 : x = y^3$. (Os caminhos devem passar pelo ponto, e tirando o ponto, devem estar dentro do domínio da função.)
Ao longo do caminho C_1, temos $f(0,y) = 0$. Portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_1}} f(x,y) = 0.$$

Ao longo do caminho C_2, temos $f(y^3,y) = 1/2$. Portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_2}} f(x,y) = \frac{1}{2}.$$

Concluímos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Solução Q2 (b)

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} xe^{-y/x}$

Considere os caminhos $C_1 : y = 1, x \leq 0$ e $C_2 : y = 1, x \geq 0$ (observe que $(0,1)$ pertence a C_1 e a C_2).

Temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1) \\ C_2}} xe^{-y/x} = \lim_{x\to 0^+} xe^{-1/x} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,1) \\ C_1}} xe^{-y/x} &= \lim_{x\to 0^-} xe^{-1/x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}(1/x^2)}{-1/x^2} = -\infty. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} xe^{-y/x}$ não existe.

Solução Q2 (c)

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} (y-1)e^{\cos(y/x)}$.

Escrevemos $F(x,y) = (y-1)e^{\cos(y/x)} = f(x,y)g(x,y)$, com

$$f(x,y) = (y-1), \quad g(x,y) = e^{\cos(y/x)}.$$

Temos $D_F = D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, e $D_f = \mathbb{R}^2$.
Observe que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} (y-1) = 0,$$

e

$$e^{-1} \leq g(x,y) = e^{\cos(y/x)} \leq e, \ \forall (x,y) \in D_F.$$

Segue, pelo Teorema do Anulamento, que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} (y-1)e^{\cos(y/x)} = 0.$$

Solução Q2 (d)

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (y-1)e^{\cos(x^2+y^2)}\cosh(x+\ln(1+x^2+y^2))$

A função $f(x,y)=(y-1)e^{\cos(x^2+y^2)}\cosh(x+\ln(1+x^2+y^2))$ é definida e é contínua em $\mathbb{R}^2$.
Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=f(1,1)=0$.

Questão 3: *Seja* $f(x,y) = \arctan(xy)$*. Encontre as derivadas parciais de primeira e segunda ordem da função* f*.*

Solução:
Relembrando: $\arctan'(t) = 1/(1+t^2)$.
As derivadas parciais de primeira ordem de f (usando a regra da cadeia):

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \tfrac{y}{1+x^2y^2}, \\ f_y(x,y) &= \tfrac{x}{1+x^2y^2}. \end{aligned}$$

Derivadas parciais de segunda ordem de f:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -\tfrac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}, \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= \tfrac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= -\tfrac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}. \end{aligned}$$