Integrais Impróprias

Ana Claudia Nabarro, Ana Paula Peron, Farid Tari

Aula de Consolidação, Cálculo 2, 2020

Questão 1: *Defina o que é uma integral imprópria.*

Solução: Uma integral imprópria de uma função é uma integral

1. em intervalos infinitos. Exemplo: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$, ou $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.
2. em intervalos onde a função não é definida em todos os pontos do intervalo. Exemplo: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$.
3. uma combinação de 1 e 2.
   Exemplo: $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

Questão 2: *Seja $p \in \mathbb{R}$. Mostre que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ *converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.*

Solução: Se $p = 1$, temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \ln(x)\Big|_{x=1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \ln(b) = +\infty.$$

Portanto, a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ diverge se $p = 1$.

Solução da Questão 2, cont.

Se $p \neq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \int_1^{+\infty} x^{-p} dx \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{1-p} x^{-p+1} \right) \Big|_{x=1}^{b} \\
&= \frac{1}{1-p} \lim_{b \to +\infty} (b^{-p+1} - 1) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & se \quad p > 1 \\ +\infty & se \quad p < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusão:

a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge para $\frac{1}{p-1}$ se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Observação

Podemos concluir que, para qualquer $a > 0$,

a integral $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$

pois

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \int_a^{1} \frac{1}{x^p}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx.$$

Questão 3

Questão 3: *Seja $p > 0$. Mostre que $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge se $p < 1$ e diverge se $p \geq 1$.*

Solução:
Se $p = 1$, temos

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to 0^+} \ln(x)\Big|_{x=a}^{1} = \lim_{a \to 0^+} -\ln(a) = +\infty.$$

Portanto, a integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ diverge se $p = 1$.

Solução da Questão 3, cont.

Se $p \neq 1$ e $p > 0$, temos

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx & = & \displaystyle\lim_{a \to 0^+} \Big(\frac{1}{1-p} x^{-p+1}\Big)\Big|_{x=a}^{1} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{1-p} \lim_{a \to 0^+} (1 - a^{-p+1}) \\ & = & \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{1}{p-1} & se & p < 1 \\ +\infty & se & p > 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Conclusão:

a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge se $0 < p < 1$ e diverge se $p \geq 1$.

Observação

Podemos concluir que, para qualquer $a > 0$,

a integral $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^p}dx$ converge se $0 < p < 1$ e diverge se $p \geq 1$

pois

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p}dx + \int_1^a \frac{1}{x^p}dx.$$

Questão 4 (a)

Questão 4: (a) *A integral* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1}\, dx$ *converge ou diverge?*

Solução:

Temos, para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \operatorname{sen}^2(x) \leq 1$ e $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

Portanto, $0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$.

Como $\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1}$ e $\frac{1}{x^2}$ são contínuas e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge

$(p = 2 > 1)$,

segue, pelo teste de comparação, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1}\, dx$ converge.

Questão 4: (b) *A integral* $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x) + 2}{\sqrt{x}}\, dx$ *converge ou diverge?*

Solução:
Temos $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$, portanto $1 \leq \operatorname{sen}(x) + 2 \leq 3$. Daí $0 < \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\operatorname{sen}(x)+2}{\sqrt{x}}$ para todo $x > 0$. Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ diverge ($p = \frac{1}{2} < 1$), segue, pelo teste de comparação, que $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x) + 2}{\sqrt{x}} dx$ diverge.

Questão 4 (c)

Questão 4: (c) *A integral* $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\, dx$ *converge ou diverge?*

Solução: Fazendo a mudança de variável $x = -u$, temos

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-1}{(-u)^{\frac{2}{3}}} du = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^{\frac{2}{3}}} du.$$

A última integral converge pois $p = \frac{2}{3} < 1$, portanto $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$ converge.