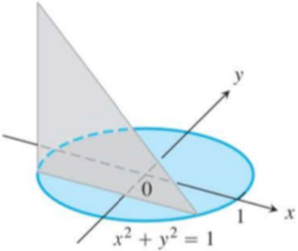
Volumes

Ana Claudia Nabarro, Ana Paula Peron, Farid Tari

Aula de Consolidação, Cálculo 2, 2020

As questões e as figuras neste arquivo são do livro de G. B. Thomas, Calculo 1, 12^a edição.

Questão 1: *A base de um sólido é o disco* $x^2 + y^2 \leq 1$. *As seções transversais por planos perpendiculares ao eixo* y *entre* $y = -1$ *e* $y = 1$ *são triângulos retângulos isósceles com um cateto no disco. Calcule o volume do sólido.*

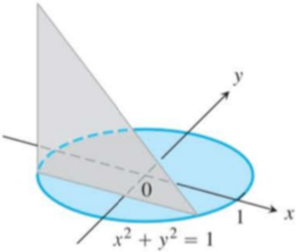


Solução:

Temos, pelo método das seções transversais,

$$V = \int_a^b A(y)dy$$

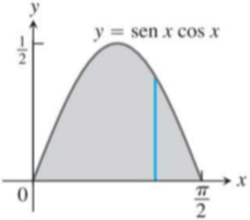
onde $A(y)$ é a área da seção transversal, e $[a, b]$ é o intervalo da variação de y.



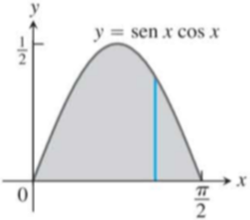
Temos
$A(y) = \frac{1}{2}(\sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2}))^2 = \frac{1}{2}(2\sqrt{1-y^2})^2 = 2(1-y^2)$
e $[a, b] = [-1, 1]$. Portanto,

$$V = \int_{-1}^{1} 2(1-y^2)dy = 2\left[y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

Questão 2: *Calcule o volume do sólido obtido coma a rotação da região sombreada em torno do eixo x.*



Solução:

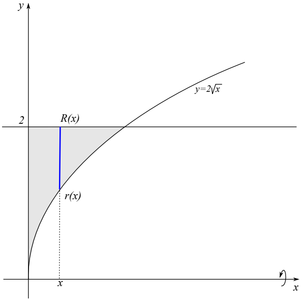


A seção transversal é um disco de raio $r(x) = \sin(x)\cos(x)$, com $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Então,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi r^2(x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(\sin(x)\cos(x))^2 dx \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x) dx \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4x)}{2} dx \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(4x)}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{16}.
\end{aligned}
$$

Questão 3: *(Método do anel) Determine o volume do sólido obtido com a rotação em torno do eixo-x da região limitada pelas curvas:* $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$.

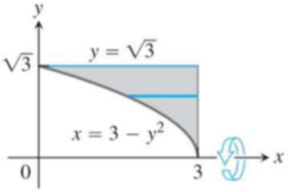
Solução:



A seção transversal é um anel com raio menor $r(x) = 2\sqrt{x}$, e raio maior $R(x) = 2$, e $x \in [0,1]$. Então,

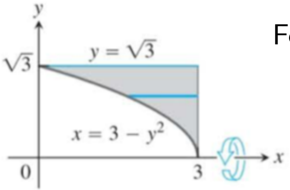
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi(R^2(x) - r^2(x))dx \\
&= \pi \int_0^1 (4 - 4x)dx \\
&= \pi \left[4x - 2x^2\right]_0^1 \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

Questão 4: *Use o método da casca para determinar o volume do sólido obtido coma a rotação da região sombreada em torno do eixo x.*



Questão 4

Solução:



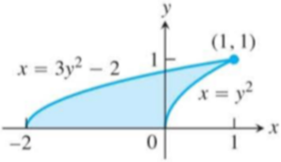
Formula do volume pelo método da casca

$$V = \int_a^b 2\pi \left(\begin{array}{c} \text{raio da} \\ \text{casca} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{altura} \\ \text{da casca} \end{array} \right) dy$$

Temos

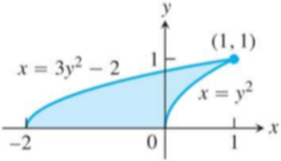
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (y)(3 - (3 - y^2))dy \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^3 dy \\ &= 2\pi \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

Questão 5: *A região sombreada é girada em torno do eixo x para gerar um sólido. Qual método (do disco, do anel, da casca) você usaria para determinar o volume do sólido? Quantas integrais seriam necessárias em cada caso. Explique.*



Questão 5

Solução:



Método do disco e anel: 2 integrais
Método da casca: 1 integral. Temos, usando o método da casca,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (y)(y^2 - (3y^2 - 2))dy \\ &= 2\pi \int_0^1 (y)(2 - 2y^2)dy \\ &= 2\pi \left[y^2 - \tfrac{2}{3}y^3\right]_0^1 = \tfrac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$