Funções parciais e substituições trigonométricas

Ana Claudia Nabarro, Ana Paula Peron, Farid Tari

Aula de Consolidação, Cálculo 2, 2020

Questão 1

Questão 1: *Calcule* $\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx$

Solução:

Observe que

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-3}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(|x^2+2x-3|)+C\end{aligned}$$

Questão 2: *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+2x+4}dx$

Solução: Se trata da integral de uma função racional com $P(x) = x - 3$ e $Q(x) = x^2 + 2x + 4$.

- $grau(P) < grau(Q)$
- Para Q, $\Delta = 4 - 4.4 < 0$, portanto Q é irredutível.

Completando quadrados, $Q(x) = (x+1)^2 + 3$.
Fazendo $u = x + 1$, ou seja $x = u - 1$, temos $dx = du$, e

$$\begin{aligned}\int \frac{x-3}{x^2+2x+4}dx &= \int \frac{u-4}{u^2+3}du \\ &= \int \frac{u}{u^2+3}du - \int \frac{4}{u^2+3}du\end{aligned}$$

Questão 2

Para primeira parcela,

$$\begin{aligned}\int \frac{u}{u^2+3}du &= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+3}du \\ &= \tfrac{1}{2}\ln(u^2+3)+C_1 \\ &= \tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)+C_1\end{aligned}$$

Para segunda parcela,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2+3}du &= \int \frac{1}{3((\frac{u}{\sqrt{3}})^2+1)}du = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}}{v^2+1}dv \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan(v)+C_2 = \tfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\tfrac{u}{\sqrt{3}})+C_2 \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\tfrac{x+1}{\sqrt{3}})+C_2\end{aligned}$$

Portanto

$$\int \frac{x-3}{x^2+2x+4}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) + C.$$

Questão 3

Questão 3: *Calcule* $\int \tan^3(x)\sec^4(x)dx$.

Solução: Lembrando:
$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, $\tan'(x) = \sec^2(x)$, $\sec'(x) = \tan(x)\sec(x)$.
Temos,

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(x)\sec^4(x)dx &= \int \tan^3(x)(1+\tan^2(x))\sec^2(x)dx \\
&\overset{u=\tan(x)}{=} \int u^3(1+u^2)du \\
&= \frac{1}{6}u^6 + \frac{1}{4}u^4 + C \\
&= \frac{1}{6}\tan^6(x) + \frac{1}{4}\tan^4(x) + C.
\end{aligned}$$

Questão 4: *Use uma substituição trigonométrica para calcular* $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Solução: Fazendo $x = \tan(\theta)$, temos $dx = \sec^2(\theta)d\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{\tan(\theta)\sec^2(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}d\theta \\
&= \int \frac{\tan(\theta)\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)}d\theta \\
&= \int \tan(\theta)\sec(\theta)d\theta \\
&= \sec(\theta) + C \\
&= \sqrt{1+\tan^2(\theta)} + C \\
&= \sqrt{1+x^2} + C
\end{aligned}$$

Questão 5: *Use uma substituição trigonométrica para calcular* $\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx$.

Solução: Fazendo $x = 2\,\mathrm{sen}(\theta)$, temos $dx = 2\cos(\theta)d\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \frac{2\cos(\theta)}{2\,\mathrm{sen}(\theta)\sqrt{4-4\,\mathrm{sen}^2(\theta)}}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{1-\cos^2(\theta)}d\theta \\
&\overset{u=\cos(\theta)}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)du \\
&= -\tfrac{1}{4}(\ln|1-u| + \ln|1+u|) + C \\
&= -\tfrac{1}{4}(\ln|1-\cos(\theta)| + \ln|1+\cos(\theta)|) + C \\
&= -\tfrac{1}{4}(\ln|1-\cos(\mathrm{sen}^{-1}(\tfrac{x}{2}))| + \ln|1+\cos(\mathrm{sen}^{-1}(\tfrac{x}{2}))|) \\
&\quad + C
\end{aligned}$$