Extremos absolutos e multiplicadores de Lagrange

Ana Claudia Nabarro, Ana Paula Peron, Farid Tari

Aula de Consolidação, Cálculo 2, 2020

Questão

Seja f uma função dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4.$$

1. *Encontre os extremos (máximos e mínimos absolutos) da função f na região*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

2. *Classifique os pontos críticos de f no interior e na fronteira de D.*

Solução: (1)

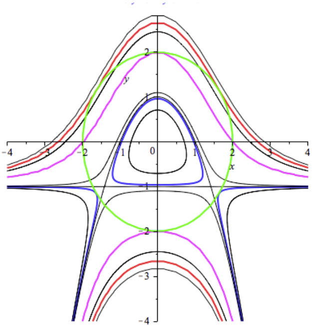
A região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ é compacta. Seu bordo é a circunferência $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ de centro $O = (0, 0)$ e raio 2 e seu interior é o disco aberto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$.

Como a função $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ é continua na região compacta D, ela admite, pelo Teorema de Weiestrass, mínimos e máximos absolutos em D.

Vamos primeiramente procurar os pontos críticos de f no interior e na fronteira de D.

Solução: (1)

Analisando as curvas de nível de f podemos visualizar os pontos críticos da função f.



Solução: (1)

1. Os pontos críticos de f no interior de D:

A função $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ possui derivadas parciais contínuas de toda ordem. Então os pontos críticos de f no interior de D são soluções do sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1+y) = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $x = 0$ ou $y = -1$. Substituindo na segunda equação, obtemos três pontos críticos da função f

$$p_1 = (0,0),\ p_2 = (\sqrt{2}, -1),\ p_3 = (-\sqrt{2}, -1)$$

todos no interior de D.
Temos $f(0,0) = 4$ e $f(\pm\sqrt{2}, -1) = 5$.

2. Os pontos críticos de f no bordo/fronteira de D:

O problema é

$$\begin{array}{cc} \text{maximize/minimize} & f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4 \\ \text{sujeta a} & g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array}$$

Usando os multiplicadores de Lagrange a um vínculo, os possíveis extremos são entre as soluções do sistema

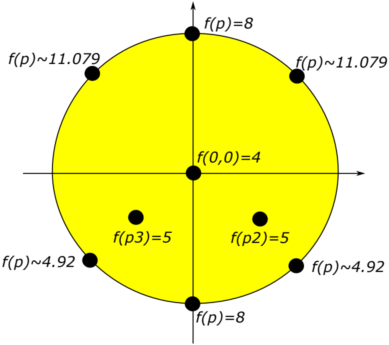
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \nabla f & = & \lambda \nabla g \\ g & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 2xy & = & \lambda(2x) \\ 2y + x^2 & = & \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 - 4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema, obtemos seis possíveis extremos de f restrita a fronteira de D: $(0, \pm 2)$ e $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

Temos

$$\begin{array}{l} f(0, \pm 2) = 8, \\ f(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}) = 8 + \frac{16\sqrt{3}}{3} \, (\approx 11,079), \\ f(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}) = 8 - \frac{16\sqrt{3}}{3} \, (\approx 4,92). \end{array}$$

Solução: (1)



Concluímos que f tem um mínimo absoluto em $(0,0)$ com valor $f(0,0)=4$ e máximos absolutos em $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$ com valor $f(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})=8+\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Solução: (2)

Vamos aplicar agora o teste da derivada de segunda ordem (teste da Hessiana) para determinar a natureza dos pontos críticos p_1, p_2 e p_3 no interior de D.
A função f possui derivadas parciais de ordem 1 e 2 que são contínuas. Então a Hessiana de f é dada por

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+y) & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

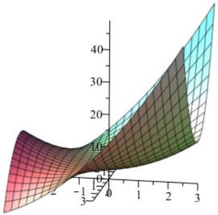
• No ponto $p_1 = (0,0)$, temos $H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Como $\det(H(0,0)) > 0$ e $f_{xx}(0,0) > 0$, o ponto $p_1 = (0,0)$ é **um mínimo local** de f com $f(0,0) = 4$.

- Nos pontos $p_2 = (\sqrt{2}, -1)$ e $p_3 = (-\sqrt{2}, -1)$

$$H(\pm\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(H(\pm\sqrt{2}, -1)) < 0$, p_2 e p_3 são **pontos de sela** de f, então não são extremos locais de f.

Observação: Temos $f(0,0) = 4$ e $f(3,-3) = -5 < f(0,0)$. Portanto f não possui extremos absolutos em $\mathbb{R}^2$. Veja o gráfico de f.



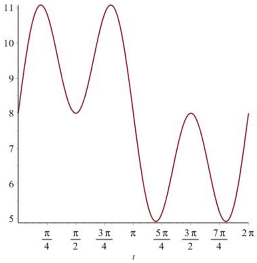
Solução: (2)

Para determinar a natureza dos pontos críticos de f restrita a fronteira de D, observamos que a fronteira C de D, dada por $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$, é uma curva lisa pois $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ nos pontos onde $g(x, y) = 0$.
Temos duas possibilidades:

- Parametrizar a curva C por, por exemplo, $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$
- Expressar C ao redor dos pontos críticos como o gráfico de uma função:
  - Em $(0, \pm 2)$: $x = \pm\sqrt{4 - y^2}$, $-1 < y < 1$
  - Em $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3})$: $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, $-1 < x < 1$

Vamos usar a primeira opção (parametrização). Então $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ restrita a C é dada por

$$g(t) = f(2\cos(t), 2\sin(t)) = 8 + 8\cos^2(t)\sin(t).$$



O gráfico de g confirma que temos seis pontos críticos da função f restrita a fronteira de D e indica a natureza de tais pontos.

Solução: (2)

Derivando $g(t) = 8 + 8\cos^2(t)\sin(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} g'(t) &= -16\cos(t)\sin^2(t) + 8\cos^3(t) \\ g''(t) &= 16\sin^3(t) - 56\cos^2(t)\sin(t) \end{aligned}$$

Observe que nos candidatos aos extremos de f sobre C, temos $g' = 0$.

• Nos pontos $(0, \pm 2)$, $\cos(\bar{t}) = 0$ e $\sin(\bar{t}) = \pm 2$. Então, temos um mínimo local de g (e portanto de f restrita a C) no ponto $(0, 2)$ e um máximo local de g (e portanto de f restrita a C) no ponto $(0, -2)$.

Os valores de f nestes pontos são: $f(0, \pm 2) = 8$.

Solução: (2)

- Nos pontos $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ e $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$:

Para $(\cos(\bar{t}), \sin(\bar{t})) = (\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

$$\begin{aligned} g''(\bar{t}) &= 8\sin(\bar{t})(2\sin^2(\bar{t}) - 7\cos^2(\bar{t})) \\ &= -\tfrac{253}{3}\sqrt{3}, \end{aligned}$$

e para $(\cos(\bar{t}), \sin(\bar{t})) = (\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$

$$g''(\bar{t}) = \frac{253}{3}\sqrt{3}.$$

Portanto, os pontos $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ são máximos locais de g (portanto de f restrita a C) e os pontos $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ são mínimos locais de g (portanto de f restrita a C).

Temos

$$\begin{aligned} f(\pm\tfrac{2\sqrt{6}}{3}, \tfrac{2\sqrt{3}}{3}) = 8 + \tfrac{16\sqrt{3}}{3}\,(\approx 11,079) \\ f(\pm\tfrac{2\sqrt{6}}{3}, -\tfrac{2\sqrt{3}}{3}) = 8 - \tfrac{16\sqrt{3}}{3}\,(\approx 4,92). \end{aligned}$$

Solução: (2)

Resumindo: