Polinômios de Taylor, extremos locais

Ana Claudia Nabarro, Ana Paula Peron, Farid Tari

Aula de Consolidação, Cálculo 2, 2020

Questão 1: *Considere a função* $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

1. *Encontre o polinômio de Taylor* P_1 *de ordem 1 de* f *em torno de* $(1,1)$.
2. *Avalie o erro cometido na aproximação* $\sqrt{xy} \approx P_1(x,y)$ *na região* $R: -0.1 \leq x-1 \leq 0.1,\ -0.1 \leq y-1 \leq 0.1$.
3. *Encontre o polinômio de Taylor* P_2 *de ordem 2 de* f *em torno de* $(1,1)$.
4. *Avalie o erro cometido na aproximação* $\sqrt{xy} \approx P_2(x,y)$ *na região* R.

Solução Q1

Observe que a função f é definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ e possui derivadas parciais contínuas de toda ordem no aberto $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$. O ponto $p_0 = (1, 1) \in D'$, então o Teorema de Taylor se aplica para f em torno de p_0.

(a) Para calcular o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $p_0 = (1, 1)$, precisamos calcular $f(1, 1)$, $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$. Temos $f(1, 1) = 1$ e

$$\begin{array}{rcl} f_x(x, y) & = & \frac{1}{2}\frac{y}{(xy)^{1/2}} \\ f_y(x, y) & = & \frac{1}{2}\frac{x}{(xy)^{1/2}} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} f_x(1, 1) & = & \frac{1}{2} \\ f_y(1, 1) & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $p_0 = (1, 1)$ é dado por

$$\begin{array}{rcl} P_1(x, y) & = & f(1, 1) + f_x(1, 1).(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) \\ & = & 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}.(y - 1) \\ & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y. \end{array}$$

Solução Q1

(b) Para encontrar o erro cometido ao aproximar f por P_1 na região compacta R, precisamos encontrar um limitante superior para os valores absolutos das derivadas parciais de ordem 2 de f na região R.

Temos

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -\frac{1}{4}\frac{y^2}{(xy)^{3/2}}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{1}{4}\frac{1}{(xy)^{1/2}}, \\ f_{yy}(x,y) &= -\frac{1}{4}\frac{x^2}{(xy)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Em R temos $\frac{9}{10} \leq x \leq \frac{11}{10}$ e $\frac{9}{10} \leq y \leq \frac{11}{10}$. Portanto

$$(\frac{9}{10})^2 \leq x^2 \leq (\frac{11}{10})^2,\ (\frac{9}{10})^2 \leq xy \leq (\frac{11}{10})^2,\ (\frac{9}{10})^2 \leq y^2 \leq (\frac{11}{10})^2.$$

Logo

$$(\frac{10}{11})^3 \leq \frac{1}{(xy)^{3/2}} \leq (\frac{10}{9})^3.$$

Solução Q1

Daí, para todo $(x, y) \in R$

$|f_{xx}(x, y)| = |-\frac{1}{4}\frac{y^2}{(xy)^{3/2}}| \leq \frac{1}{4} \cdot (\frac{11}{10})^2 \cdot (\frac{10}{9})^3 = \frac{10 \times 11^2}{4 \times 9^3}$,

$|f_{yy}(x, y)| = |-\frac{1}{4}\frac{x^2}{(xy)^{3/2}}| \leq \frac{10 \times 11^2}{4 \times 9^3}$,

$|f_{xy}(x, y)| = |\frac{1}{4}\frac{1}{(xy)^{1/2}}| \leq \frac{1}{4} \cdot (\frac{10}{9}) = \frac{10}{4 \times 9}$.

Logo $M = \frac{10 \times 11^2}{4 \times 9^3}$ é um limitante superior para aos valores absolutos das derivadas parciais de ordem 2 de f em R.

Observe que na região R, temos $|x - 1| \leq 0.1$ e $|y - 1| \leq 0.1$.

Consequentemente, o resto de Lagrange em torno do ponto $(1, 1)$ satisfaz

$$\begin{array}{rcl}
|E(x, y)| & = & |\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}).(x-1)^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}).(x-1).(y-1) + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}).(y-1)^2\right)| \\
& \leq & \frac{1}{2}M(|x-1| + |y-1|)^2 \\
& \leq & \frac{1}{2}M(0.1 + 0.1)^2 \\
& \leq & 2 \cdot M \cdot 10^{-2} = 2\frac{10 \times 11^2}{4 \times 9^3} \cdot 10^{-2} \approx 0.00829.
\end{array}$$

Então o erro cometido ao aproximar $\sqrt{xy} \approx P_1(x, y)$ em qualquer ponto da região R é menor ou igual a $\frac{11^2}{4 \times 10 \times 9^3} \approx 0.00829$.

Solução Q1

(c) Para calcular o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de $p_0 = (1,1)$, precisamos calcular $f(1,1)$, $f_x(1,1)$, $f_y(1,1)$, $f_{xx}(1,1)$, $f_{xy}(1,1)$ e $f_{yy}(1,1)$. Temos

$$f_{xx}(1,1) = -\frac{1}{4},\ f_{xy}(1,1) = \frac{1}{4},\ f_{yy}(1,1) = -\frac{1}{4}$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de $p_0 = (1,1)$ é dado por

$$\begin{aligned}
P_2(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1).(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + \\
&\quad \tfrac{1}{2!}(f_{xx}(1,1).(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,1).(x-1).(y-1) + f_{yy}(1,1).(y-1)^2) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{2}.(y-1) \\
&\quad \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{4}(x-1)^2 + \tfrac{2}{4}(x-1)(y-1) - \tfrac{1}{4}(y-1)^2) \\
&= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{4}xy - \tfrac{1}{8}y^2.
\end{aligned}$$

Solução Q1

(d) Para encontrar o erro cometido ao aproximar f por P_2 na região compacta R, precisamos encontrar um limitante superior M para os valores absolutos das derivadas parciais de ordem 3 de f na região R. Daí

$$\begin{array}{rcl} |E(x,y)| & \leq & \frac{1}{3!}M(|x-1|+|y-1|)^3 \\ & \leq & \frac{1}{6}M(0.1+0.1)^3 \\ & \leq & \frac{4}{3}10^{-3}M \end{array}$$

Encontrem um valor para M e comparem as amplitudes dos erros da aproximação de f por P_1 e P_2 na região R.

Questão 2: *Determine se a função* $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$ *possui máximos e mínimos locais em* $\mathbb{R}^2$.

Solução:
Os pontos críticos da função f são dados por

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

As soluções do sistema são, $x = -1, 0, 1$ e $y = -1, 0, 1$, ou seja, temos nove pontos críticos: $(0,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$, $(\pm1,\pm1)$.
Para determinar a natureza dos pontos críticos aplicamos o teste da derivada de segunda ordem (Teste da Hessiana).

Solução Q2

Temos

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

- No ponto $(0,0)$, temos $det(H(0,0)) > 0$ e $f_{xx}(0,0) < 0$. Então $(0,0)$ é um máximo local.
- Nos pontos $(0,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ temos $det(H(0,\pm 1)) < 0$ e $det(H(\pm 1, 0)) < 0$. Então os pontos são pontos de sela.
- Nos pontos $(\pm 1, \pm 1)$ temos $det(H(\pm 1, \pm 1)) > 0$ e $f_{xx}(\pm 1, \pm 1) > 0$. Então os pontos são mínimos locais.

Solução Q2

Observe que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = \underbrace{(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2}_{\geq 0} - 2 \geq -2 = f(\pm 1, \pm 1).$$

Portanto, os pontos $(\pm 1, \pm 1)$ são mínimos absolutos de f.
A função f não tem valor máximo absoluto pois um ponto de máximo absoluto seria um ponto de máximo local e, por exemplo, $f(2,1) = 7 > 0 = f(0,0)$.