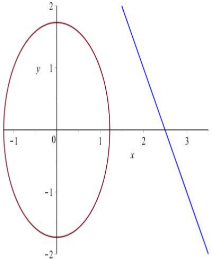
Derivada Direcional

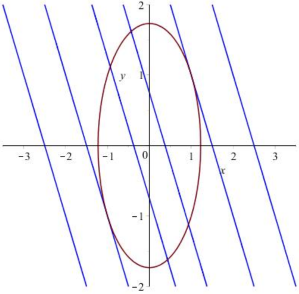
Ana Claudia Nabarro, Ana Paula Peron, Farid Tari

Aula de Consolidação, Cálculo 2, 2020

Questão 1

Questão 1: *Considere a curva* $f(x,y) = 3$ *com* $f(x,y) = 2x^2 + y^2$. *Encontre os pontos desta curva onde a reta tangente é paralela a* $r : y + 2x = 5$.





Questão 1

A reta $r: y + 2x = 5 \iff 2x + y = 5$ tem vetor normal $\vec{v} = (2, 1)$. Portanto, um vetor diretor a reta é $\vec{u} = (1, -2)$.
Um vetor normal a reta tangente a curva $f(x, y) = 3$ (elipse) no ponto (a, b) é $\nabla f(a, b)$.
Precisamos achar os pontos $P = (a, b)$ da elipse onde $\nabla f(a, b)$ é ortogonal ao vetor diretor $\vec{u} = (1, -2)$ da reta r.
Temos

$$\nabla f(a, b).\vec{u} = (4a, 2b) \cdot (1, -2) = 4a - 4b.$$

Logo $\nabla f(a, b).\vec{u} = 0 \iff a = b$.
Como o ponto $P = (a, a)$ pertence a elipse, temos

$$f(a, a) = 3 \iff 2a^2 + a^2 = 3 \iff a = -1 \text{ ou } a = 1.$$

Concluímos que os pontos da curva onde a reta tangente é paralela a r são $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Questão 2

Questão 2: Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. (Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em ^0C.) Um indivíduo encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio.

(a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto $(3, 2)$.

(b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

(c) De quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe 0.01 km na direção encontrada no item (b)?

(d) Calcule a derivada direcional de T em $(3, 2)$ na direção de $(3, 2)$ ao ponto $(0, 1)$.

(e) De quanto decrescerá aproximadamente a temperatura caso caminhe 0.01 km na direção $\vec{j}$.

Solução Q2

(a) A temperatura no ponto $(3,2)$ é
$T(3,2) = 40 - 3^2 - 2(2^2) = 23$.
Os pontos no plano onde a temperatura é igual a 23 são os pontos que pertencem à curva de nível $T(x,y) = 23$, ou seja
$40 - x^2 - 2y^2 = 23 \iff x^2 + 2y^2 = 17$.

(b) A função T cresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor gradiente. Portanto a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura é

$$\nabla T(3,2) = (-2x, -4y)_{|(x,y)=(3,2)} = (-6, -8).$$

Solução Q2

(c) Seja $\vec{u} = \dfrac{\nabla T(3,2)}{||\nabla T(3,2)||} = (a,b)$ e considere a função

$$f(t) = T(3+at, 2+bt)$$

que é a restrição de T a reta que passa pelo ponto $(3,2)$ e paralela a $\nabla T(3,2)$.

Podemos aproximar f em torno de $t=0$ por seu polinômio de Taylor de ordem 1, ou seja $f(t) \sim f(0) + tf'(0)$. Portanto $f(t) - f(0) \sim tf'(0)$.

Temos

$$f'(0) = \nabla T(3,2) \cdot \vec{u} = ||\nabla T(3,2)|| = ||(-6,-8)|| = 10.$$

Caso caminhe $t = 0.01km$ na direção de $\vec{u}$ (**<u>unitário</u>**) a variação da temperatura $\sim tf'(0) = (0.01) \times 10 = 0.1$.

(d) Temos $\vec{u} = (0,1) - (3,2) = (-3,-1)$. Logo

$$D_{\vec{u}}T(3,2) = \nabla T(3,2) \cdot \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = (-6,-8) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{26\sqrt{10}}{10}.$$

Solução Q2

(e) A derivada direcional no ponto $(3,2)$ na direção $\vec{j}$ é

$$D_{\vec{j}}T(3,2) = \nabla T(3,2) \cdot \frac{\vec{j}}{||\vec{j}||} = (-6,-8) \cdot (0,1) = -8.$$

Seguindo o mesmo raciocino do item (c), caso caminhe $t = 0.01km$ nesta direção a temperatura decrescerá de $(0.01) \times 8 = 0.08$.