Aplicações
Disciplina: Matemática
Curso: Ciências Biológicas
Prof^a Ana Paula Peron **14/12/2004**

Exemplo 1. *Total de pessoas acometidas por uma epidemia*
Uma epidemia está se alastrando a partir de um centro (coloque-o na origem do sistema de coordenadas). Segundo os dados recolhidos em pesquisas de campo, o modelo matemático que representa a densidade dos acometidos y a x quilômetros a partir da origem é

$$y = \frac{2100}{x+7} - 50, \quad 0 \leq x \leq 35,$$

ou seja, y representa o número de pessoas que contraíram a doença por quilômetro quadrado. Quantas pessoas ficaram doentes dentro desta região?

Observe que no epicentro da epidemia, a densidade é de 250 doentes/km^2 e que para $x > 35$ supõe-se que não existem mais doentes.

Dividindo o intervalo [0,35] em n sub-intervalos, $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = 35$, temos $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Se

$$\overline{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2},$$

então o número de pessoas N_i que contraíram a doença dentro do anel A_i delimitado pelos raios x_{i-1} e x_i é aproximadamente

$$N_i \simeq \text{Area}(A_i) y(\overline{x}_i) = (\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) y(\overline{x}_i) = \pi(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) y(\overline{x}_i),$$

ou seja,

$$N_i \simeq 2\pi \overline{x}_i y(\overline{x}_i) \Delta_i x.$$

Portanto, o número total de pessoas infectadas é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi \overline{x}_i y(\overline{x}_i) \Delta_i x = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2100}{\overline{x}_i + 7} - 50 \right) \overline{x}_i \Delta_i x.$$

Notando que a precisão desses números aumenta quando n tende a infinito, obtemos que o número exatos de pessoas infectadas será

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} 2\pi \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2100}{\overline{x}_i + 7} - 50 \right) \overline{x}_i \Delta_i x &= 2\pi \int_0^{35} \left(\frac{2100}{x+7} - 50 \right) x \, dx \\ &= 2\pi(42875 - 14700(\ln 2 + \ln 3)) \simeq 103846. \end{aligned}$$

Exemplo 2. *Volume de sangue que flui por segundo através de uma secção transversal de um vaso*

Considere uma artéria de raio R. Pela Lei do Fluxo Laminar, a velocidade V do sangue depende da distância r a que este se encontra do centro da artéria e é expressa por

$$V(r) = k(R^2 - r^2), \quad 0 \leq r \leq R,$$

onde k é uma constante positiva, relacionada à viscosidade do sangue e ao comprimento da artéria. Com esse modelo, podemos imaginar o sangue fluindo como se fosse constituído por camadas cilíndricas encaixantes (chamadas lâminas cilíndricas). A espessura de cada lâmina é $\Delta_i r$. Seja

$$\overline{r}_i = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}.$$

Assim, a área da espessura do i-ésima lâmina é

$$A_i = \pi r_i^2 - \pi r_{i-1}^2 = \pi(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) = 2\pi \overline{r}_i \Delta_i r.$$

Sabemos que o volume de sangue que passa na i-ésima lâmina por unidade de tempo é dado pelo produto da área da i-ésima lâmina pela velocidade que o sangue está fluindo nela.

Agora, podemos aproximar a velocidade que o sangue está fluindo na i-ésima lâmina por

$$V(\overline{r}_i) = k(R^2 - \overline{r}_i^2).$$

Assim, o volume de sangue fluindo pela i-ésima lâmina é aproximadamente

$$A_i V(\overline{r}_i) = 2\pi \overline{r}_i \Delta_i r k(R^2 - \overline{r}_i^2) = 2\pi k(R^2 \overline{r}_i - \overline{r}_i^3)\Delta_i r.$$

Logo, o volume de sangue fluindo na secção transversal é aproximadamente

$$2\pi k \sum_{i=1}^{n} (R^2 \overline{r}_i - \overline{r}_i^3)\Delta_i r.$$

Portanto, o volume de sangue fluindo na secção transversal é dado por (Lei do fluxo laminar ou Lei de Poiseuille)

$$2\pi k \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (R^2 \overline{r}_i - \overline{r}_i^3)\Delta_i r = 2\pi k \int_0^R (R^2 r - r^3)dr = \frac{\pi k R^4}{2}.$$

Referência: Aguiar, A. F. A., Xavier, A. F. S., Rodrigues, J. E. M., *Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas*. Editora Harbra.