Conteúdo

1 Derivada Direcional

Lembre-se: $\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{e_i})-f(\mathbf{p})}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. *(Geogebra)*

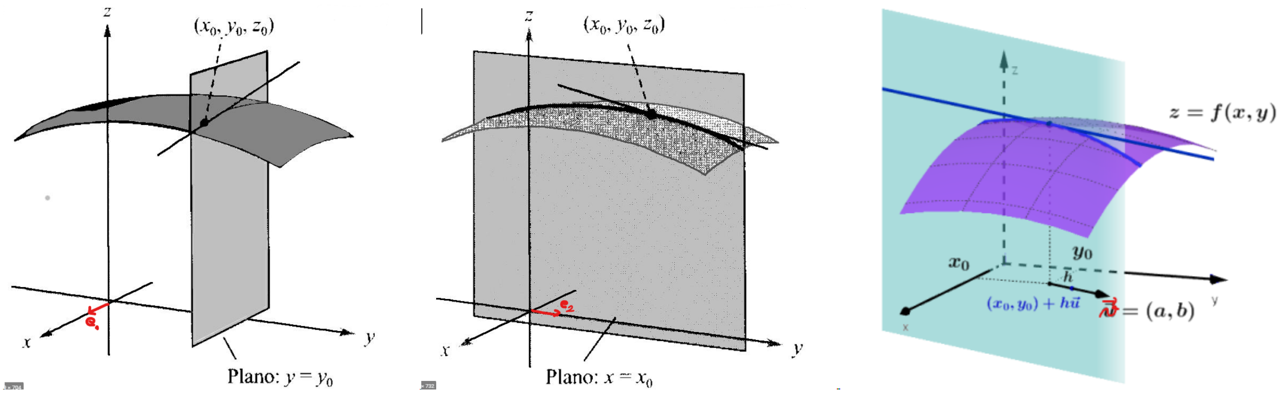

Figura 1: Figuras da internet

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in \mathring{D}$ e $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário.

- **Se existir**
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+h\vec{\mathbf{v}})-f(\mathbf{p})}{h} = L \ \in \mathbb{R},$$
então dizemos que
  - **f é derivável em p na direção $\vec{\mathbf{v}}$,**
  - **L é a derivada direcional de f em p, na direção $\vec{\mathbf{v}}$;**
    notação: $D_{\vec{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p}) := L$ ou $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(\mathbf{p}) := L$.
- Se o limite não fizer sentido, ou não existir (ou for infinito), dizemos que
  - **f não é derivável em p na direção $\vec{\mathbf{v}}$.**

Teorema.
Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D e $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ um vetor unitário.

Se f *é diferenciável* em $\mathbf{p}$ então

- **f é derivável em p em qualquer direção,**
- **vale** $D_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$

Teorema.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D.

Se f *é diferenciável* em $\mathbf{p}$ e $\nabla f(\mathbf{p}) \neq 0$ então

- o valor máximo de $D_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p})$ ocorre quando $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \nabla f(\mathbf{p}) / \|\nabla f(\mathbf{p})\|$, e
- o **valor máximo** de $D_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p})$ é $\|\nabla f(\mathbf{p})\|$

  e ainda mais

- a partir de $\mathbf{p}$, a **direção** e o **sentido** que se deve tomar para que f **cresça mais rapidamente** é a do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$.

Analogamente,

- a partir de $\mathbf{p}$, a **direção** e o **sentido oposto** de $\nabla f(\mathbf{p})$ é a de **mínimo crescimento para** f
- a **taxa de variação mínima** de f em $\mathbf{p}$ é $-\|\nabla f(\mathbf{p})\|$.

2 Plano Tangente

Em Cálculo 1:
f é derivável (diferenciável) em p quando existe $M = f'(p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)}{x-p}\right] = \lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)-[f(p)+f'(p)(x-p)]}{|x-p|}\right] = 0,$$

e quando f é derivável em p, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é definida pela função afim $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$. De outra forma, podemos definir, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ como sendo a única função afim $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T(p) = f(p)$ e

$$\lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)-T(x)}{|x-p|}\right] = 0;$$

e assim, f é derivável em p **se e somente se** *$T(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$.*

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de D.

Definição:
O **(hiper)plano tangente ao gráfico de f em $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$** é a única (se existir) função afim $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\pi(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})$ e satisfaz a propriedade:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x})-\pi(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} = 0.$$

Observação: O (hiper)plano tangente é a **função afim que (neste sentido) melhor aproxima a função, quando x está perto de p**:

$$f(\mathbf{x}) \approx \pi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \approx \mathbf{p}.$$

Teorema.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto <u>interior</u> de D.
Se f é diferenciável em $\mathbf{p}$ então

$$\pi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})$$

Caso $n = 2$: $\mathbf{p} = (a, b)$ e $\mathbf{x} = (x, y)$

Se f é diferenciável em (a, b), então o **plano tangente ao gráfico de f no ponto** $P = (a, b, f(a, b))$ é dado por:

$$z = \pi(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b). \tag{2.1}$$

Atenção: O (hiper)plano $\pi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$ *pode existir*, mas ele *pode não ser o (hiper)plano tangente* ao gráfico de f em $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$!!!

. . . .

Resumo: Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto,

- f diferenciável em $D \Longleftrightarrow graf(f)$ possui plano tangente em todos pontos
- f derivável em $D \not\Rightarrow graf(f)$ possui plano tangente em todos pontos