Conteúdo

1 Diferenciabilidade

- Em cálculo 1 uma função derivável era sempre contínua, e sempre possuía um reta tangente.
- Uma função de várias variáveis pode ter todas as derivadas parciais mas não ser contínua.

Em Cálculo 1 temos:

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **é derivável (diferenciável) em** p *, onde $p \in D$ um ponto de acumulação de D, quando:*

$\boxed{\text{existe } M \in \mathbb{R}}$ *tal que:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = M \iff \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(p+h) - f(p) - \overbrace{Mh}^{\mathcal{L}(h)}}{|h|} \right] = 0$$

onde $\boxed{\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dada por } \mathcal{L}(x) = Mx \text{ é uma função linear}}$.

Neste caso, dizemos que $\boxed{M = f'(p)}$ *é a derivada de f em p.*

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in D$ um ponto de acumulação de D.

- Dizemos que **f é diferenciável em $\mathbf{p}$,** se existe uma função linear $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - \mathcal{L}(\mathbf{x}-\mathbf{p})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \mathcal{L}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Lembre-se:

- Uma **função linear** $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem a forma:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = M_1x_1 + \ldots + M_nx_n,$$

onde $\mathbf{a} = (M_1, \ldots, M_n)$ e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

Caso particular $n = 2$:

- $\mathbf{x} = (x, y)$ $\mathbf{p} = (a, b)$, $\mathbf{h} = (h, k)$,
- Uma **função linear** $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem a forma: $\mathcal{L}(x, y) = Mx + Ny$.
- **f é diferenciável em (a, b) quando: existem $M, N \in \mathbb{R}$ tais que**

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - M(x-a) - N(y-b)}{\|(x-a, y-b)\|} = 0$$

ou

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Mh - Nk}{\|(h, k)\|} = 0$$

ou, escrevendo

$$E_{(a,b)}(h, k) = E(h, k) := f(a+h, b+k) - f(a, b) - Mh - Nk,$$

$$\lim_{(\mathbf{h},\mathbf{k})\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{h},\mathbf{k})}{\|(\mathbf{h},\mathbf{k})\|} = \mathbf{0}$$

$(n = 2)$ **f é diferenciável em $\mathbf{p} = (a, b)$** $\iff \exists M, N \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0, \qquad (\star)$$

$$E(h, k) := f(a+h, b+k) - f(a, b) - Mh - Nk.$$

1.1 Condições necessárias para diferenciabilidade

$n = 2:$ $\mathbf{p} \in D_f$ ponto de acumulação, interior de D_f

f é diferenciável em $\mathbf{p} = (a, b)$ $\iff$

$$\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}\|(h,k)\| = 0$$

$$\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} [f(a+h, b+k) - f(a,b) - Mh - Nk] = 0$$

$$\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} [f(a+h, b+k) - f(a,b)] = 0$$

$$\underset{y=b+k}{\overset{x=a+h}{\iff}} \lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) - f(a,b)] = 0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

- **f é contínua em p.**

---

f é diferenciável em $\mathbf{p} = (a, b)$ $\iff$

$$\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

✓ $$\Longrightarrow \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \gamma:\, k=0}} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{h\to 0} \frac{E(h,0)}{\|(h,0)\|} = 0$$

$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b) - Mh}{|h|} = 0$$

$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b) - Mh}{h} = 0$$

$$\iff \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} - M\right] = 0$$

$$\iff M = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\right] = f_x(a,b)$$

. . . .

✓ $$\Longrightarrow \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \gamma:\, h=0}} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

$$\iff N = f_y(a,b)$$

- **existem as derivadas parciais de f em p.**
- $M = f_x(\mathbf{p})$ **e** $N = f_y(\mathbf{p})$

Teorema. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto <u>interior</u> de D.
Se f é diferenciável em $\mathbf{p}$ então

- **f é contínua em p,**
- **existem as derivadas parciais de f em p,**
- **necessariamente** $M_1 = f_{x_1}(\mathbf{p}), \ldots, M_n = f_{x_n}(\mathbf{p})$

Em particular,

$$f \text{ diferenciável} \Longrightarrow f \text{ contínua}$$

<u>Consequências:</u>

- f não contínua em $\mathbf{p} \Longrightarrow f$ não diferenciável em $\mathbf{p}$
- $\nexists$ alguma derivada parcial de f em $\mathbf{p} \Longrightarrow f$ não diferenciável em $\mathbf{p}$

1.2 Condição suficiente e necessária para diferenciabilidade

Teorema 1.1. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D. f é diferenciável em $\mathbf{p}$ se, e somente se,

- **existe** $f_{x_1}(\mathbf{p})$
- **existe** $f_{x_2}(\mathbf{p})$
- $\vdots$
- **exite** $f_{x_n}(\mathbf{p})$
- $\lim\limits_{\mathbf{h}\to 0} \dfrac{E(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$, **onde**

$$E(\mathbf{h}) := f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - f_{x_1}(\mathbf{p})h_1 - f_{x_2}(\mathbf{p})h_2 - \ldots - f_{x_n}(\mathbf{p})h_n$$

Note:

$$E(\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - (f_{x_1}(\mathbf{p}), f_{x_2}(\mathbf{p}), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{p})) \cdot \mathbf{h}$$

1.3 Vetor Gradiente, Derivada e Diferencial

Vetor Gradiente

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais de primeira ordem existem em $\mathbf{p}$, onde $\mathbf{p} \in D$ é um ponto interior de D.

O **vetor gradiente** de f em $\mathbf{p}$ é definido por

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \right).$$

Para verificar diferenciabilidade de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $\mathbf{p}$ é preciso primeiro calcular $\nabla f(\mathbf{p})$ e depois verificar se

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} = 0$$

ou

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Derivada

Lembre-se: Em Cálculo 1: Quando $\exists M \in \mathbb{R}$;

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(p+h)-f(p)-Mh}{|h|}\right]=0,$$ *dizemos que* $M = f'(p)$ *é a* *derivada de* f *em* p

---

Definimos a **derivada** de $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $\mathbf{p}$ por $f'(\mathbf{p}) := \nabla f(\mathbf{p})$.

A **função derivada** de f é aquela dada por:

$$f' : D_{f'} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

onde

$$D_{f'} := \{\mathbf{x} \in D_f : \mathbf{x} \text{ é ponto interior de } D_f \text{ e } f \text{ possui todas derivadas parciais em } \mathbf{x}\}$$

e

$$f'(\mathbf{x}) := \nabla f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_{f'}.$$

Dizemos que f é **derivável em** A quando ∇f existe (i.e., todas as derivadas parciais existem) em todos os pontos de A.

Portanto,

$$\boxed{f \text{ diferenciável} \Longrightarrow f \text{ derivável}}$$

Diferencial

Em Cálculo 1, a diferencial de f $(y = f(x))$ é definida por:

$$df = dy = f'(p)dx, \qquad dx = h, \qquad\qquad \textit{e vale:} \quad dy \approx \Delta y.$$

(Para uma interpretação geométrica, ver aqui)

A **diferencial de f em p** é definida por $df_{\mathbf{p}} = \mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por:

$$df_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = f'(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

ou

$$df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}) = \mathcal{L}(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} = f'(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}.$$

Ainda, sendo $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ e $dx_i := h_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então

$$df_{\mathbf{p}}(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p})dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p})dx_n$$

Fazendo $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$,

$$E(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}),$$

se f é diferenciável em $\mathbf{p}$, então:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \underbrace{\nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})}_{df_{\mathbf{p}}(x)} + E(\mathbf{x}),$$

onde

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} \frac{E(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} = 0 \quad (\text{e portanto } \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} E(\mathbf{x}) = 0).$$

Portanto,

$$df_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) =: \Delta z, \quad \textbf{quando } \mathbf{x} \approx \mathbf{p}$$

1.4 Condição suficiente para diferenciabilidade

Teorema (Condição para diferenciabilidade).
Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D.

> Se **existem** as derivadas parciais de f em uma vizinhança de $\mathbf{p}$ e elas **são contínuas** em $\mathbf{p}$ então f **é diferenciável em p.**

Portanto: se A é aberto e $f \in \mathcal{C}^1(A)$ então f é diferenciável em A.

Atenção: pode acontecer de f ser diferenciável mas não ter derivadas parciais contínuas!

- **Exemplo:**
  - $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \mathbf{p} = (0,0)$$

$$\checkmark\, f_x(0,0) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h} = 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) : \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f_x(x,y) :$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) :$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\pi+2n\pi}} \to 0; \cos\left(\frac{1}{2x_n^2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad t_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \to 0; \cos\left(\frac{1}{2t_n^2}\right) = 1$$

$$\checkmark f_y(0,0) = \begin{cases} 2y\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{k^2\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k} = 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$$

$$\boxed{\checkmark\, f_x \text{ e } f_y \text{ NÃO são contínuas em (0,0)}}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\|(h,k)\|} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}(h^2+k^2)\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ é diferenciável em } (0,0).}$$

De fato, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

1.5 Regras e teoremas de derivação / diferenciação

Sejam $k \in \mathbb{R}$ e

$f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **deriváveis** em $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p} \in D$ um ponto de acumulação de D)

então

- $kf,\ f \pm g,\ fg$ **são deriváveis em p,**
- f/g **é derivável em p, desde que** $g(\mathbf{p}) \neq 0$**,**
- **vale**

$$\begin{cases} \nabla(kf)(\mathbf{p}) = k\,\nabla f(\mathbf{p})\,, \\ \nabla(f \pm g)(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \pm \nabla g(\mathbf{p})\,, \\ \nabla(fg)(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p})\nabla f(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\nabla g(\mathbf{p})\,, \\ \\ \nabla(f/g)(\mathbf{p}) = \dfrac{g(\mathbf{p})\nabla f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p})\nabla g(\mathbf{p})}{g^2(\mathbf{p})} \qquad (\textbf{se } g(\mathbf{p}) \neq 0). \end{cases}$$

Sejam $k \in \mathbb{R}$ e

$f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,$ **diferenciáveis** em $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p} \in D$ um ponto de acumulação de D)

então

- $kf,\ f \pm g,\ fg$ **são diferenciáveis em p,**
- f/g **é diferenciável em p, desde que** $g(\mathbf{p}) \neq 0$**,**
- **vale**

$$\begin{cases} d(kf)_{\mathbf{p}} = k\,df_{\mathbf{p}}\,, \\ d(f \pm g)_{\mathbf{p}} = df_{\mathbf{p}} \pm dg_{\mathbf{p}}\,, \\ d(fg)_{\mathbf{p}} = g(\mathbf{p})df_{\mathbf{p}} + f(\mathbf{p})dg_{\mathbf{p}}\,, \\ \\ d(f/g)_{\mathbf{p}} = \dfrac{g(\mathbf{p})df_{\mathbf{p}} - f(\mathbf{p})dg_{\mathbf{p}}}{g^2(\mathbf{p})} \qquad (\textbf{se } g(\mathbf{p}) \neq 0). \end{cases}$$

2 Resumo

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D.

- f **diferenciável em p** $\Longrightarrow$ f **é contínua em p,**
- f **diferenciável em p** $\Longrightarrow$ f **é derivável em p,**
- f **derivável numa viz. de p e** f' **contínua em p** $\Longrightarrow$ f **diferenciável em p,**
- f **diferenciável em p** $\Longleftrightarrow$ f **derivável e** $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{E(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$

$$E(\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \underbrace{\nabla f(\mathbf{p})}_{f'(\mathbf{p})} \cdot \mathbf{h}$$

- **vale** $df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}$
- f **diferenciável em p** $\Longrightarrow$ $df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}) \approx \Delta z = f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$ **para** $\mathbf{h} \approx 0$

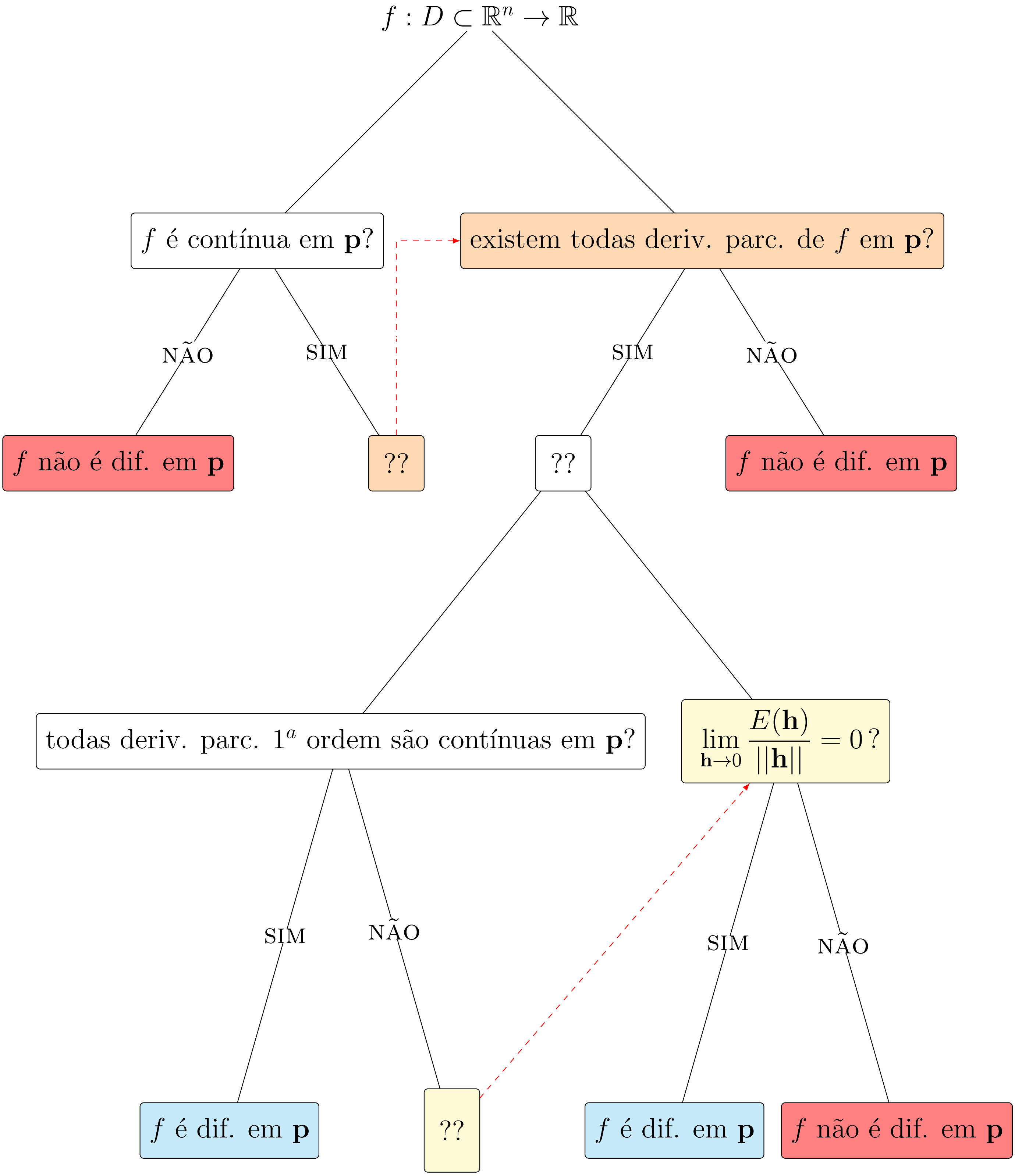
Consequentemente:

- f **não contínua em p** $\Longrightarrow$ f **não é diferenciável em p,**
- **alguma derivada parcial de** 1^a **ordem de** f **não existe em p** $\Longrightarrow$ f **não é diferenciável em p.**

Atenção para não errar:

- f **contínua em p** $\not\Rightarrow$ f **derivável em p**
- f **contínua em p** $\not\Rightarrow$ f **diferenciável em p**
- f **derivável em p** $\not\Rightarrow$ f **contínua em p**
- f **derivável em p** $\not\Rightarrow$ f **diferenciável em p**
- **derivadas parciais de** 1^a **ordem de** f **não contínuas em p** $\not\Rightarrow$ f **não diferenciável em p**

3 Diagrama: como decidir se f é diferenciável?



$$\boxed{E(\mathbf{h}) := f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}}$$