Conteúdo

1 Derivadas Parciais

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in D$ um ponto de acumulação de D. Seja $\mathbf{e_i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ o versor (vetor unitário) cujas coordenadas são todas iguais a 0 exceto a i-ésima que é igual a 1.

- **Se existir**

  $$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{e_i}) - f(\mathbf{p})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p_1, \ldots, p_i + h, \ldots, p_n) - f(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)}{h} = L$$

  ($L \in \mathbb{R}$) então dizemos que

  - **L é a derivada parcial de f, em relação à variável x_i, em $\mathbf{p}$**
    notação: $L := \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = f_{x_i}(\mathbf{p}) = f_i(\mathbf{p}) = D_i f(\mathbf{p}) = D_{\mathbf{e_i}}(\mathbf{p})$.

- Se o limite ou não existir ou for infinito, dizemos que

  - **a derivada parcial de f, em relação à x_i, em $\mathbf{p}$ não existe**.

Note: se considerarmos $\mathbf{x} = \mathbf{p} + h\mathbf{e_i} = (p_1, \ldots, p_i + h, \ldots, p_n)$, então

$$\mathbf{x} = (p_1, \ldots, x_i, \ldots, p_n) \quad \text{onde } x_i = p_i + h$$

e portanto $h = x_i - p_i$ e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{e_i}) - f(\mathbf{p})}{h} = \lim_{x_i \to p_i} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})}{x_i - p_i}$$

1.1 Interpretação Geométrica

Caso particular $\mathbf{n=2}$: $\mathbf{p}=(a,b)$, $f(x,b)=g(x)$, $f(a,y)=w(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{\overbrace{f(x,b)}^{g(x)}-\overbrace{f(a,b)}^{g(a)}}{x-a}=g'(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=\lim_{y\to b}\frac{\overbrace{f(a,y)}^{w(y)}-\overbrace{f(a,b)}^{w(b)}}{y-b}=w'(b)$$

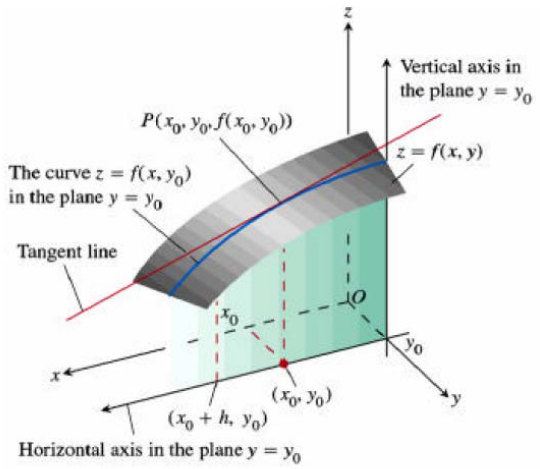

Figura 1: figura encontrada na internet

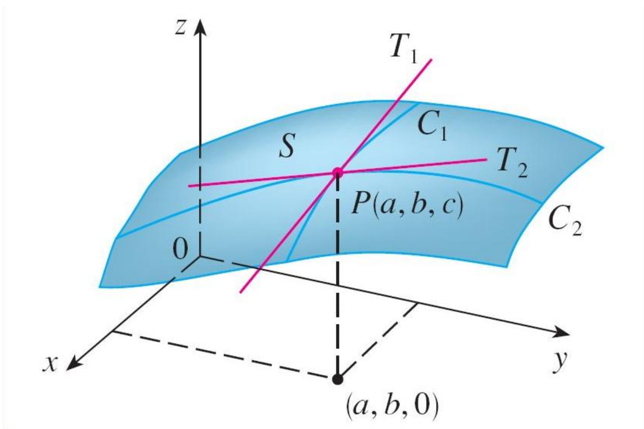

Figura 2: Stewart, Cálculo , vol. 2

Animação no Geogebra

Caso particular $\mathbf{n=3}$: $\mathbf{p}=(a,b,c)$,

$f(x,b,c)=\varphi(x),\;\; f(a,y,c)=\psi(y),\;\; f(a,b,z)=\rho(z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{f(a+h,b,c)}^{\varphi(a+h)}-\overbrace{f(a,b,c)}^{\varphi(a)}}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b,c)-f(a,b,c)}{x-a}=\varphi'(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)=\lim_{k\to 0}\frac{\overbrace{f(a,b+k,c)}^{\psi(b+k)}-\overbrace{f(a,b,c)}^{\psi(b)}}{k}=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y,c)-f(a,b,c)}{y-b}=\psi'(b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)=\lim_{r\to 0}\frac{f(a,b,c+r)-f(a,b,c)}{r}=\lim_{z\to c}\frac{\overbrace{f(a,b,z)}^{\rho(z)}-\overbrace{f(a,b,c)}^{\rho(c)}}{z-c}=\rho'(c)$$

Se a derivada parcial de f em relação a x_j existe em todos os pontos de um conjunto $A\subset D_f\subseteq\mathbb{R}^n$ então podemos definir a **função derivada parcial**:

$$f_{x_j}:A\to\mathbb{R}:\mathbf{x}\mapsto f_{x_j}(\mathbf{x});\qquad j=1,..,n,$$

e o domínio A éo conjunto

$$dom(f_{x_j})=\{p\in D_f : p\,\text{é ponto de acumulação de}\,D_f\,\text{e}\,L\,\text{é finito}\}\subseteq D_f$$

Cálculo das derivadas parciais: basta usar as regras de derivação (do Cálculo 1) supondo que a função dependa só daquela variável, enquanto as outras variáveis SÃO PENSADAS como constantes.

Lembre-se: as regras de derivação podem ser aplicadas no conjunto dos pontos onde todas as funções “envolvidas” são deriváveis!!!

1.2 Derivadas de ordem superior

Derivadas parciais de ordem superior: quando podemos derivar cada *função derivada parcial* mais vezes teremos:

derivadas parciais de segunda ordem:

- derivada segunda de f com respeito a x_k (primeiro) e a x_j (depois):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\underleftarrow{\partial x_j \partial x_k}} \right) \quad \text{ou} \quad (f_{x_k})_{x_j} = f_{x_k x_j} \left(f_{\underrightarrow{x_k x_j}} \right)$$

- derivada segunda de f com respeito a x_j duas vezes:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \quad \text{ou} \quad (f_{x_j})_{x_j} = f_{x_j x_j}$$

Pela definição, por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f_{yx}(x,y) = (f_y)_x(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h,y) - f_y(x,y)}{h} \\ &= \lim_{w\to x} \frac{f_y(w,y) - f_y(x,y)}{w-x} \end{aligned}$$

derivadas parciais de terceira ordem:

- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k^2} = f_{x_k x_k x_j}$

- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_i} = f_{x_i x_k x_j}$

- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_j^3} = f_{x_j x_j x_j}$

$\vdots$

etc.

1.3 Classes de derivabilidade e derivadas mistas

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$:

- dizemos que **f é de classe $\mathcal{C}^k$ em A** ($f \in \mathcal{C}^k(A)$) se f e todas suas derivadas parciais até a ordem k existem e são contínuas em todo A.
- dizemos que **f é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em A** ($f \in \mathcal{C}^\infty(A)$) se f e todas suas derivadas parciais de todas as ordens existem e são contínuas em todo A.

Teorema (Teorema de Schwarz).
Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in \mathcal{C}^2(A)$, **então $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ em A.**

Corolário.
Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in \mathcal{C}^k(A)$, **então, em A, a ordem de derivação não importa para as derivadas até a ordem k.**

Corolário.
Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$, **então, em A, a ordem de derivação não importa para as derivadas parciais de qualquer ordem.**

- **Exemplos:**

  1. Funções polinomiais pertencem à classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
  2. Funções racionais são funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ em seus domínios naturais.
  3. Soma, produto, composta de funções que pertencem à classe $\mathcal{C}^k(A)$ são funções de classe $\mathcal{C}^k(A)$:

$$f(x,y) = x^3 y + e^{y^2} \text{ é de classe } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$$
$$f(x,y) = |x|^3 + y \text{ é de classe } \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \qquad (verifique!)$$

Se $f = f(x,y)$, **pode $f_{xy} \neq f_{yx}$?**

2 Existe relação entre derivadas parciais e continuidade?

Em Cálculo 1:

Se $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f, então:

- f derivável em $p \Longrightarrow f$ contínua em p.
- f não contínua em $p \Longrightarrow f$ não derivável em p.
- f contínua em $p \not\Rightarrow f$ derivável em p.