Conteúdo

1 Funções de várias variáveis **1**
1.1 Algumas funções típicas . . . 1
1.2 Conjunto de nível . . . 3
1.3 Limites . . . 4
1.4 Continuidade . . . 5

2 Propriedades **6**
2.1 Cálculo de limites: . . . 6
2.1.1 Limite da composta: forma geral . . . 6
2.1.2 Teorema do Confronto . . . 7
2.1.3 Teorema do Anulamento . . . 7
2.1.4 Limites por caminhos . . . 8
2.2 Teoremas sobre funções contínuas (ver máximos e mínimos absolutos, Slide 12) . . . 10

1 Funções de várias variáveis

Uma **Função (real) de várias variáveis** é uma função

$$f : D \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}), \quad \text{onde } D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

1.1 Algumas funções típicas

- **função linear**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ fixado.
  Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$: $f(x, y, z) = (2, 1, -3) \cdot (x, y, z) = 2x + y - 3z$

- **função afim**:$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$ com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ fixados.
  Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$: $f(x, y, z) = (2, 1, -3) \cdot (x, y, z) + 5 = 2x + y - 3z + 5$

- **função polinomial**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} = (x_1, .., x_n) \mapsto p(\mathbf{x})$ com p polinômio nas variáveis $x_1, .., x_2$.
  Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$: $p(x, y, z) = 3x^4 + 2x^2y^3 - xyz$ (polinômio de grau 5).

- **funções racionais, algébricas, transcendentais**: como em cálculo 1.
  Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$: $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 - 5yx}{2x - z}$, $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 - y^2 + z}$

- **função homogênea de grau λ**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que
  $$f(t\mathbf{x}) = t^\lambda f(\mathbf{x}) \text{ para todos } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0.$$
  Exemplos: todas as funções lineares, todos os polinômios homogêneos: $p(x, y, z) = 3x^4 + 2xy^3 - xyz^2$, $f(x, y) = \dfrac{x \sin(x/y)}{x^2 + xy - y^2}$, ...

Valem as mesmas definições do caso de funções de uma variável (**domínio natural**, contradomínio, imagem, sobrejetora, injetora, bijetora, operações, **composição**, inversa, **gráfico**, **função limitada**, supremo, ínfimo, máximo, mínimo...), veja **Slides de Cálculo 1, prof. E. Massa, aqui**.

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Gráfico: **graf(f)** $:= \{(\mathbf{x}, \clubsuit) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mathbf{x} \in D_f \text{ e } f(\mathbf{x}) = \clubsuit\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

- $\boxed{\text{Como "se comportam" geometricamente os domínios quando } n = 1, 2, 3?}$

- $\boxed{\text{Como "se comportam" geometricamente os gráficos quando } n = 1, 2, 3?}$

Podemos também considerar uma **Função de várias variáveis a valores vetoriais**:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_k(\mathbf{x})).$$

1.2 Conjunto de nível

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Definição: O **Conjunto de nível de f** é um conjunto da forma

$$N_k = N_k(f) = \{\mathbf{x} \in D : \ f(\mathbf{x}) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^n,$$

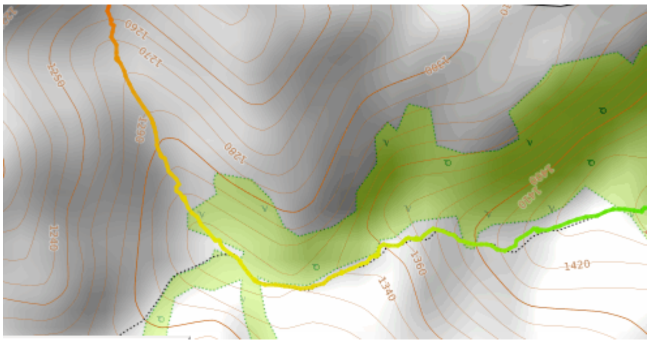
para um $k \in \mathbb{R}$ fixado. Se $k \notin Im(f)$, então $N_k = \emptyset$.

Se $n = 2$, $f(\mathbf{x}) = k$ é dita **curva de nível de f**

Se *($n > 3$)*$n = 3$, $f(\mathbf{x}) = k$ é dita *(hiper)***superfície de nível de f**.

- Como "se comportam" geometricamente os conjuntos de nível quando $n = 2, 3$?

(a) Delfinópolis - MG



(b) Pico do Papagaio - Aiuruoca - MG

Figura 1: Curvas de nível (mapa topográfico)

Observação: O gráfico de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pode ser visto como a superfície de nível $F(x, y, z) = 0$ da função $F : D \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = f(x, y) - z$:

$$\underbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}}_{graf(f)} = \underbrace{\{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} : F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0\}}_{N_0(F)}$$

1.3 Limites

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p}$ um ponto de acumulação de D.

- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L$ significa

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| < \delta \text{ implica } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

- se a afirmação acima é falsa para todo $L \in \mathbb{R}$ dizemos que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$ não existe

---

Formulações alternativas de limite:

- $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \setminus \{\mathbf{p}\} \quad \text{implica } f(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(L)$$

- $$\forall Y \text{ vizinhança de } L\ \exists X \text{ vizinhança de } \mathbf{p} \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \cap X \setminus \{\mathbf{p}\} \quad \text{implica } f(\mathbf{x}) \in Y$$

Limites infinitos:

- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = +\infty$ significa

  $$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| < \delta \text{ implica } f(\mathbf{x}) > M$$

- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = -\infty$ significa

  $$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| < \delta \text{ implica } f(\mathbf{x}) < M$$

Limites no infinito (para D não limitado):

- $\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = L$ significa

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists H > 0 \text{ tal que } x \in D \text{ e } \|\mathbf{x}\| > H \text{ implica } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

1.4 Continuidade

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$.

- dizemos que f **é contínua em p**, se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \textit{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta \text{ implica } |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})| < \varepsilon$$

- caso contrário, dizemos que f **é descontínua em p**, (*lembre que se* $\mathbf{p} \notin D$, *não se fala em continuidade ou descontinuidade em* $\mathbf{p}$)
  - se f é contínua em $\mathbf{p}$ para todo $\mathbf{p} \in A$ dizemos f **é contínua em** A
  - se f é contínua em $\mathbf{p}$ para todo $\mathbf{p} \in D$ dizemos f **é contínua**

- $\mathbf{p} \in D$ é ponto de acumulação de D: f é contínua em $\mathbf{p}$ se, e somente se,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p})$$

- $\mathbf{p} \in D$ não é ponto de acumulação de D: f é sempre contínua em $\mathbf{p}$.

Observação: Definições de limite e continuidade para funções de várias variáveis a valores vetoriais $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ são análogas às anteriores, basta substituir $|\cdot|$ por $\|\cdot\|$ onde for necessário.

2 Propriedades

2.1 Cálculo de limites:

Valem propriedades análogas ao caso em uma variável (limite de operações, da composta, unicidade, permanência do sinal, confronto, anulamento: veja Propriedades - suficiente substituir $|\cdot|$ por $\|\cdot\|$ onde precisar). Em particular:

2.1.1 Limite da composta: forma geral

Teorema (Limite da composta: forma geral).
Sejam

$$\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^n\,, \quad \mathbf{g} : D_{\mathbf{g}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k\,, \quad Im(\mathbf{f}) \subseteq D_{\mathbf{g}},$$

$$\mathbf{p} \text{ ponto de acumulação de } D_{\mathbf{f}}\,, \quad \mathbf{a} \text{ ponto de acumulação de } D_{\mathbf{g}}\,,$$

tais que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \quad \text{e} \quad \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = L\,.$$

Se vale pelo menos UMA entre:

(a) $\mathbf{a} \in D_{\mathbf{g}}$ e $\mathbf{g}$ contínua em $\mathbf{a}$,

(b) $\exists\, r > 0 :\ \mathbf{x} \in D_{\mathbf{f}}\ e\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{a}\,.$

Então

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = L\,.$$

Em particular: se $\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{p}$ e $\mathbf{g}$ é contínua em $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ então

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{p})).$$

Corolário (Continuidade das composições de contínuas).
Qualquer função obtida via soma, diferença, produto, divisão, composição de funções continuas, **é contínua no seu domínio natural**.

São contínuas, no seu domínio:
- projeção: $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto x_i$,
- norma: $n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$,
- polinomiais, racionais, algébricas, transcendentais

2.1.2 Teorema do Confronto

Teorema (de confronto).
Sejam $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $\mathbf{p}$ ponto de acumulação de D. Se

$$\exists\, r > 0 : \; \mathbf{x} \in D \ e \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r \;\Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$$

$$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} h(\mathbf{x}) = L$$

então $\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = L$.

2.1.3 Teorema do Anulamento

Teorema (do Anulamento).
Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $\mathbf{p}$ ponto de acumulação de D. Se

$$\exists\, M > 0, \exists\, r > 0 : \; \mathbf{x} \in D \ e \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r \;\Rightarrow |f(\mathbf{x})| \leq M$$

(isto é, f é limitada em uma vizinhança de $\mathbf{p}$)

e

$$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = 0$$

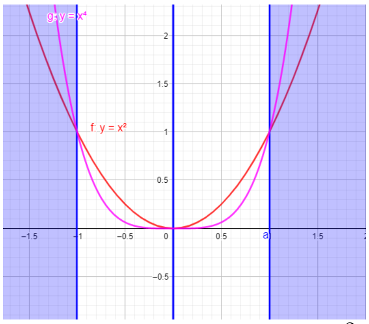
então $\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$.

2.1.4 Limites por caminhos

Motivação: Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$?

Considere $F(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, $\quad D_F = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

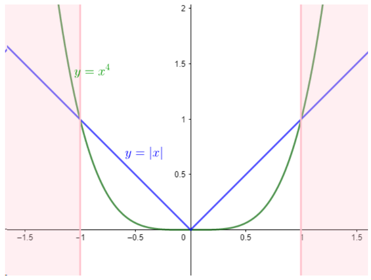
Conseguimos escrever $F(x,y) = f(x,y)g(x,y)$, onde f é uma função limitada e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$?



$$F(x,y) = \frac{x^2}{x^4+y^2}\, y$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

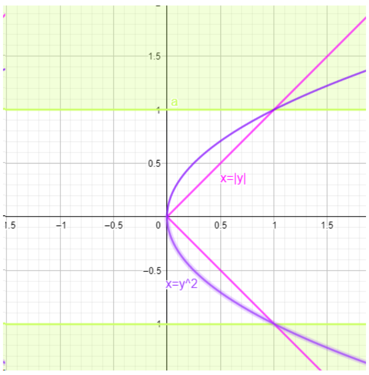
$$\left|\frac{x^2}{x^4+y^2}\right| \leq 1 \text{ para } |x| \geq 1$$



$$F(x,y) = \frac{x}{x^4+y^2}\, xy$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$$

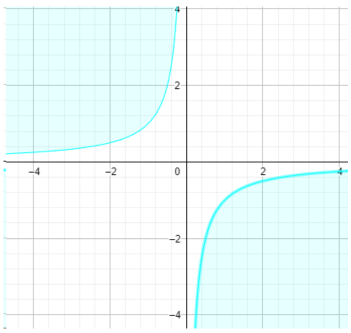
$$\left|\frac{x}{x^4+y^2}\right| \leq 1 \text{ para } |x| \geq 1$$



$$F(x,y) = \frac{y}{x^4+y^2}\, x^2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$$

$$\left|\frac{y}{x^4+y^2}\right| \leq 1 \text{ para } |y| \geq 1$$



$$F(x,y) = \frac{xy}{x^4+y^2}\, x$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

$$\left|\frac{xy}{x^4+y^2}\right| \leq 1 \text{ para } |xy| \geq 1 \text{ e } xy < 0$$

Figuras geradas no Geogebra2D

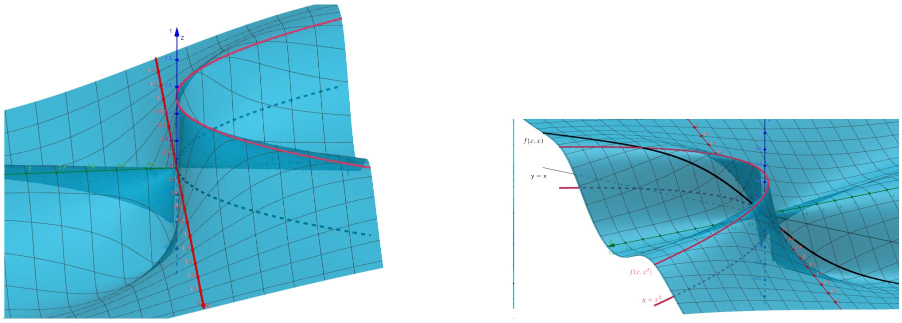


Figura 2: Intersecções de $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ com $x = 0$, $y = x$ e $y = x^2$, Geogebra 3D Classic

Teorema. *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p}$ um ponto de acumulação de D.*

Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to D \cup \{\mathbf{p}\}$ uma curva (portanto contínua, I intervalo) tal que:

- $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$ *para algum* $t_0 \in I$,
- $\gamma(t) \neq \mathbf{p}$, *para todo* $t \neq t_0$.

Se $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L$, *então* $\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) = L$

Consequências:

- se γ como acima e vale $\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) = L$ então

$$\text{ou} \quad \exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L \quad \text{ou} \quad \nexists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$$

- se para γ_1, γ_2 (distintas) como acima vale $\lim_{t\to t_0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to t_1} f(\gamma_2(t))$, então

$$\nexists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$$

Figura 3: Intersecções de $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ com $x = 0$, $y = 0$ e $y = x$

2.2 Teoremas sobre funções contínuas (ver máximos e mínimos absolutos, Slide 12)

Lembrete de Cálculo 1:

Teorema (Teorema do valor intermediário).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, e seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) > \gamma > f(b) \qquad ou \qquad f(a) < \gamma < f(b)$$

então existe $c \in (a, b) : \; f(c) = \gamma$.
Em particular f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Teorema (Teorema de Weiestrass).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então existem $x_1, x_2 \in [a, b] : \; f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \; \forall\, x \in [a, b]$.

Corolário.
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então

$$Im(f) = [m, M],$$

onde m, M **são, respectivamente, o mínimo e o máximo de** f.

Definições

- Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **compacto** quando é fechado e limitado.
- Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **conexo por caminhos** quando para todos $x, y \in D$ existe uma curva (contínua) $\gamma : [a, b] \to D$ tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

Teorema (Teorema de Weiestrass em $\mathbb{R}^n$).
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D compacto,
então existem $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D : \; f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2) \; \forall\, \mathbf{x} \in D$.

Teorema.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D conexo por caminhos.
Se $c, d \in Im(f)$ **com** $c < d$**, então** $[c, d] \subseteq Im(f)$.

Corolário.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D compacto e conexo por caminhos,
então

$$Im(f) = [m, M],$$

onde m, M **são, respectivamente, o mínimo e o máximo de** f.