Conteúdo

1 $\mathbb{R}^n$, propriedades, topologia

Lembrete:

- Dados dois conjuntos A, B é dito **produto cartesiano de A com B** o conjunto
$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A\,, \ b \in B\}\,.$$

Em particular,

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$:
podemos representar no plano.

- $\mathbb{R} \times .. \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..n\}$:
se $n = 3$ podemos representar no espaço,

  se $n > 3$ não podemos desenhar.
  (veja o Hipercubo na página do Prof. Ton Marar ou Wikipedia)

Quando $n \geq 2$ representaremos pontos/vetor em $\mathbb{R}^n$ com letras em negrito: $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}$, etc.

Se $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ não é corpo, mas pode ser visto como **espaço vetorial com produto escalar** (**Espaço Euclidiano de dimensão** n):

- se $\mathbf{x} = (x_1, .., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ definamos
  - $\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff x_i = y_i$ para todo $i = 1, ..., n$,
  - $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, .., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$, (soma vetorial)
  - $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, .., x_n - y_n) \in \mathbb{R}^n$,
  - $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, .., \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$, (múltiplo do vetor)
  - $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = < \mathbf{x}, \mathbf{y} > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \in \mathbb{R}$, (produto escalar)
  - $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >}$ (norma)
  - $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (distância Euclideana)
  - $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos\left(\dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}\right)$ (ângulo)
  - $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ (perpendicularismo)

No caso $n = 3$ (e $n = 2$) podemos definir o **produto vetorial:**

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Propriedades (veja ex 11 p 107 Guidorizzi):

- $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$
- $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z})$
- $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$ (antisimetria)
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}$
- $(\lambda \mathbf{x}) \wedge \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})$
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0 = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}), \qquad \text{i.e., } (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}, \mathbf{y}$
- $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ são linearmente dependentes se, e somente se, $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0$.

OBS: reveja as definições e propriedades de espaço vetorial, produto escalar, produto vetorial, norma, distância: Guidorizzi ou livro de GA.

Queremos falar sobre **continuidade, derivadas e integral** de funções a valores vetoriais e/ou de funções de várias variáveis.

Esses conceitos estão relacionados com o conceito de **limite**, o qual por sua vez está relacionado, dizendo de maneira rudimentar, com "proximidade" (vizinhança).

Definições

Sejam $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$ (em $\mathbb{R}$):

- **Esfera de centro $\mathbf{x}_0$ e raio δ**: $S_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta\}$.
- **Bola aberta de centro $\mathbf{x}_0$ e raio δ**: $B_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta\}$;
- **Bola fechada de centro $\mathbf{x}_0$ e raio δ**: $\overline{B_\delta(\mathbf{x}_0)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq \delta\}$;

(Compare quando $n = 1, 2, 3$.)

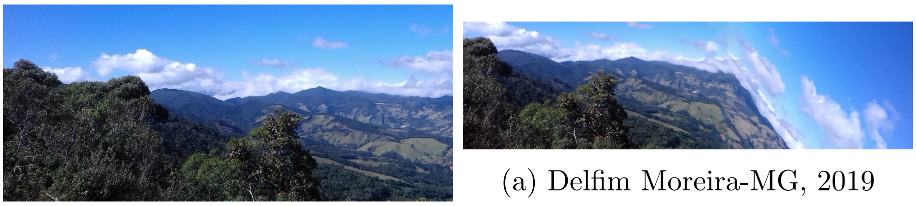
Curiosidades:

1. Uma bola pode não ser redonda! Veja por exemplo **Bolas Quadradas em $\mathbb{R}^2$** ou **Bolas em L^p**.

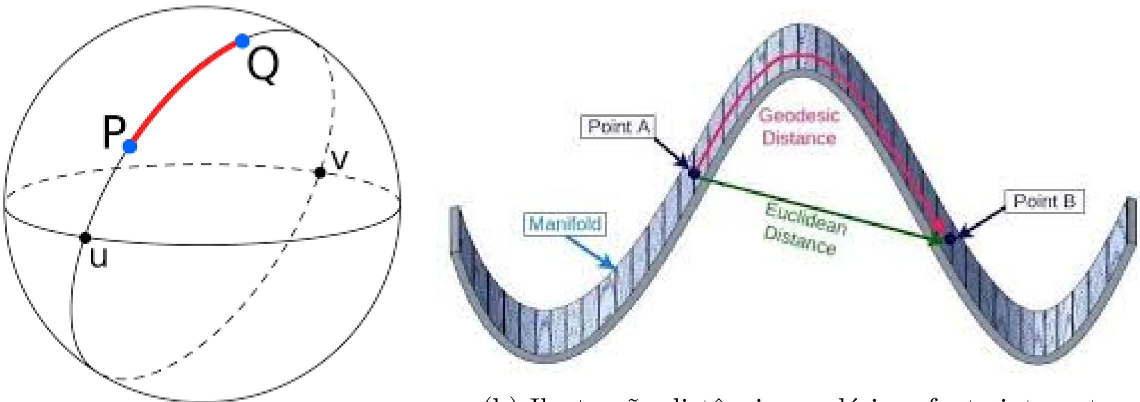
2. Quando $x, y \in S_1(0)$, a função ângulo

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{||x||||y||}\right) = \arccos\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

é a **distância geodésica** entre os pontos x e y, que poderíamos dizer que é a função que determina a "distância real"na Terra ("variedades"), veja por exemplo **Geodésica**.



(a) Delfim Moreira-MG, 2019



(b) Ilustração distância geodésica: fonte internet

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$

- $\mathbf{p}$ é dito **ponto interior de A** se
$$\exists\, \delta > 0 \ : B_\delta(\mathbf{p}) \subseteq A\,;$$
- $\mathbf{p}$ é dito **ponto exterior de A** se
$$\exists\, \delta > 0 \ : B_\delta(\mathbf{p}) \cap A = \emptyset\,;$$
- $\mathbf{p}$ é dito **ponto de fronteira de A** se
$$\forall\, \delta > 0 \qquad \exists\, \mathbf{q} \in B_\delta(\mathbf{p}) \setminus A \qquad e \qquad \exists\, \mathbf{r} \in B_\delta(\mathbf{p}) \cap A\,;$$
- $\mathbf{p}$ é dito **ponto de acumulação de A** se
$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{p}) \cap A \setminus \{\mathbf{p}\}\ .$$
  - **Exemplo:** $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos

- A é dito um **conjunto aberto** se todo ponto pertencente ao conjunto A é ponto interior de A;
- A é dito um **conjunto fechado** se seu complementar $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ é aberto;
- A é dito um **conjunto limitado** se existe $\delta > 0$ tal que $A \subseteq B_\delta(\mathbf{0})$.
- **Vizinhança de $\mathbf{x}_0$** : um conjunto qualquer aberto que contenha $\mathbf{x}_0$

Bolas abertas são conjuntos abertos, portanto
$$B_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta\}$$
é uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$.

Teorema. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. São equivalentes:*

1. *A é fechado*
2. *A contém todos seus pontos de acumulação*
3. *A contém todos seus pontos de fronteira.*

Teorema (Bolzano-Weiestrass)**.** *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado e possui infinitos elementos então ele possui pelo menos um ponto de acumulação.*

Algumas notações

- ∂A: **fronteira de A** (conj. dos pontos de fronteira)
- $int(A)$ **ou** $\mathring{A}$: **interior de A** (conj. dos pontos interiores)
- $\overline{A}$: **fecho de A** (i.e., $A \cup \partial A$)
- A^c: **complementar de A**

2 Funções a valores vetoriais

Uma **Função (de uma variável real) a valores vetoriais** é uma função

$$\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \qquad f_i : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

onde $D \subseteq \mathbb{R}$.

- **Exemplos:**
  $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$ $\quad \mathbf{g}(t) = (t, t^2, 1)$ $\quad \mathbf{h}(t) = \left(\frac{1}{t}, t^2, \sin(t)\right)$ $\quad D = ?$

2.1 Limites

Seja p um ponto de acumulação de D, e $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$,

- $\lim_{t\to p} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}$ significa

$$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \text{ tal que } t \in D \; e \; 0 < |t - p| < \delta \text{ implica } \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$$

- se a afirmação acima é falsa para todo $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$ dizemos que
  $\lim_{t\to p} \mathbf{f}(t)$ não existe

Também podemos definir $\lim_{t\to\pm\infty} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}$ como em cálculo 1.

Teorema: $\lim_{t\to p} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_n) \iff \lim_{t\to p} f_i(t) = L_i$ para $i = 1, .., n$

- **Exemplo:**

  $\lim_{t\to 2} \mathbf{f}(t) = ?$

  $\lim_{t\to 0} \mathbf{h}(t) = ?$

2.2 Continuidade

Sejam $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $p \in D$

- dizemos que **f é contínua em** p, se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tal que } t \in D \; e \; |t - p| < \delta \text{ implica } \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(p)\| < \varepsilon$$

- caso contrário, dizemos que **f é descontínua em** p,

(lembre que se $p \notin D$, *não se fala em continuidade ou descontinuidade em* p)

- se **f** é contínua em p para todo $p \in A \subset D$ dizemos **f é contínua em** A
- se **f** é contínua em p para todo $p \in D$ dizemos **f é contínua**

- se $p \in D$ é ponto de acumulação de D: **f** é contínua em p, quando

$$\lim_{t \to p} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(p)$$

- se $p \in D$ não é ponto de acumulação de D: **f** é sempre contínua em p.

Corolário: **f** é contínua em $p \iff$ cada f_i, $i = 1, .., n$, é contínua em p.

- **Exemplo:** $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$

2.3 Derivada

Seja $p \in D$ um ponto de acumulação de D.

- **Se existir**
$$\lim_{t \to p} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(p)}{t - p} = \mathbf{L} \in \mathbb{R}^n ,$$
então dizemos que
  - **f é derivável em p ,**
  - **L é a derivada de f em p ;** notação: $\mathbf{f}'(p) := \mathbf{L}$.
- caso contrário, dizemos que **f não é derivável em p**.

- se $\mathbf{f}$ é derivável em p para todo $p \in A$ dizemos **f é derivável em A**,
- se $\mathbf{f}$ é derivável em p para todo $p \in D$ dizemos **f é derivável**.

Podemos então definir uma nova função: a **função derivada de f** :

$$\mathbf{f}' : D_{\mathbf{f}'} \to \mathbb{R}^n : p \mapsto \mathbf{f}'(p)$$

onde $D_{\mathbf{f}'} = \{p \in D : \ p$ é de acumul. de D e $\mathbf{f}$ é derivável em $p\} \subseteq dom(\mathbf{f})$

Teorema: $\mathbf{f}$ é derivável em $p \iff$ cada f_i, $i = 1, .., n$, é derivável em p e

$$\mathbf{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), ..., f_n'(t))$$

Teorema: $\mathbf{f}$ é integrável em $[a, b] \iff$ cada f_i, $i = 1, .., n$, é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) = \left(\int_a^b f_1(t), \int_a^b f_2(t), ..., \int_a^b f_n(t) \right)$$

- **Exemplos:** $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$ $\quad \mathbf{g}(t) = (t, t^2, 1)$ $\quad (t \in \mathbb{R})$

  $\mathbf{f}' = ?$ $\quad \mathbf{g}' = ?$

Vale:

- se $\mathbf{f}$ é derivável em p então **o gráfico da reta**

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(p) + \mathbf{f}'(p)(t-p), \quad t \in \mathbb{R}$$

é a reta tangente em $(p, \mathbf{f}(p))$ ao gráfico de $\mathbf{f}$.

i.e., a única reta tal que $\dfrac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{r}(t)}{t-p} \to 0$ quando $t \to p$

Propriedades (regras de cálculo de derivadas):

Sejam $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriváveis, então

$\mathbf{f} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}, \quad \lambda \mathbf{f}$ são deriváveis e vale:

- $(\mathbf{f} + \mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}'$
- $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}'$ (*produto escalar*)
- $(\lambda \mathbf{f})' = \lambda' \mathbf{f} + \lambda \mathbf{f}'$ (*produto de escalar por vetor*)

Sejam $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda : C \subseteq \mathbb{R} \to D$ deriváveis

- $(\mathbf{f} \circ \lambda)'(t) = \mathbf{f}'(\lambda(t))\lambda'(t) \quad \forall t \in C$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t) = \\
&= [f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + \ldots + f_n(t)g_n(t)]' \\
&= (f_1(t)g_1(t))' + (f_2(t)g_2(t))' + \ldots + (f_n(t)g_n(t))' \\
&= f_1'(t)g_1(t) + f_1(t)g_1'(t) + f_2'(t)g_2(t) + f_2(t)g_2'(t) + \ldots + f_n'(t)g_n(t) + f_n(t)g_n'(t)) \\
&= (f_1'(t), \ldots, f_n'(t)) \cdot (g_1(t), \ldots, g_n(t)) + (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \cdot (g_1'(t), \ldots, g_n'(t)) \\
&= (\mathbf{f}'\cdot\mathbf{g})(t) + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}')(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{f}\circ\lambda)'(t) = &\\
&= ((f_1\circ\lambda)'(t), (f_2\circ\lambda)'(t), ..., (f_n\circ\lambda)'(t)) \\
&= (f_1'(\lambda(t))\lambda'(t), f_2'(\lambda(t))\lambda'(t), ..., f_n'(\lambda(t))\lambda'(t)) \\
&= (f_1'(\lambda(t)), f_2'(\lambda(t)), ..., f_n'(\lambda(t)))\lambda'(t) \\
&= \mathbf{f}'(\lambda(t))\lambda'(t)
\end{aligned}
$$

3 Curvas

Definição

Chamamos de **Curva em $\mathbb{R}^n$** uma função contínua $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.
Definimos:

- **Traço da curva**: a imagem
- **equação paramétrica/vetorial da curva**: a lei
  - **Exemplos:** $\gamma_1(t) = (t^2, t)$ $\quad \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ $\quad (t \in \mathbb{R})$

- Dizemos que a curva é **simples** se γ é injetora.
- Dizemos que a curva é **fechada** se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Dizemos que a curva é **fechada simples** se fechada e $\gamma|_{[a,b)}$ injetora.
- Dizemos que a curva é **derivável** se γ é derivável

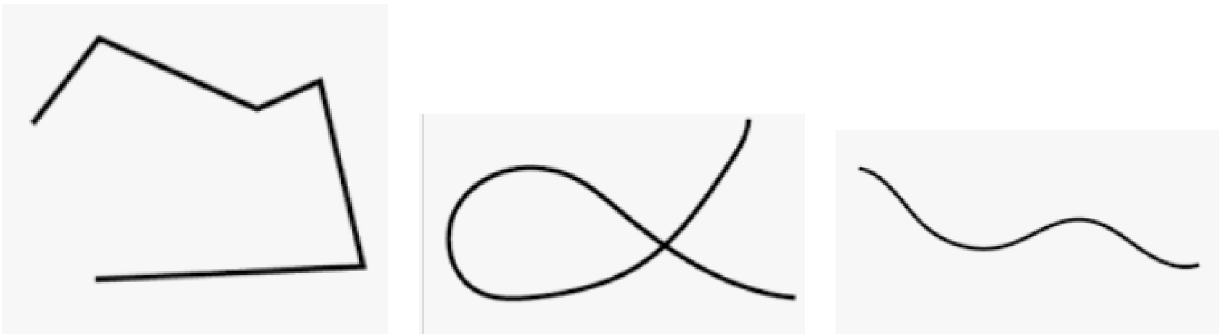


Figura 2: (aberta, simples, não der.), (aberta, não simples, der.), (aberta, simples, der.)

Figura 3: (fechada, simples, não der.), (fechada, não simples, der.), (fechada, simples, der.)

Figuras retiradas da internet

Seja $p \in I$. Se γ é derivável em p e $\gamma'(p) \neq 0$ então

- $\gamma'(p)$ é um **vetor tangente ao traço** no ponto $\gamma(p)$
  Assim,

  $\star$ o traço da curva(reta) dada por:

$$\mathbf{r}(t) = \gamma(p) + t\gamma'(p), \quad t \in \mathbb{R}$$

  é uma **reta tangente ao traço de** γ no ponto $\gamma(p)$.

  $\star$ o traço da curva(reta) dada por:

$$\mathbf{r}(t) = \gamma(p) + t\widehat{\mathbf{n}}(p), \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{onde } \ \widehat{\mathbf{n}} \cdot \gamma' = 0)$$

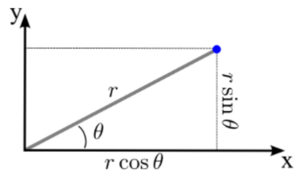
  é uma **reta normal ao traço de** γ no ponto $\gamma(p)$.

- Dizemos que a curva é **regular** (ou **suave**) se γ é derivável e $\gamma' \neq \mathbf{0}$ em todo I: logo o traço possui reta tangente em todo ponto.

3.1 Coordenadas polares no plano

Representamos o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em coordenadas polares como:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta), \quad r \geq 0, \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Podemos usá-las para descrever curvas em $\mathbb{R}^2$:

a curva dada (em coordenadas polares) por

$$r = f(\theta) \geq 0, \; \theta \in [a, b]$$

é a curva de equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos(\theta) \\ y = f(\theta)\sin(\theta)\,, \end{cases} \qquad \theta \in [a, b]\,.$$