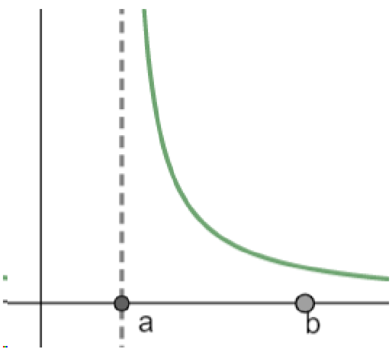
Conteúdo

Im.1 Caso (II): Integrais impróprias

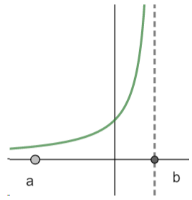
Im.1.1 Intervalo I não fechado limitado e f não limitada em I

Seja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ tal que **para todo $\delta > 0$, a função $f|_{[a+\delta,b]}$ seja limitada e integrável em** $[a + \delta, b]$.

- se existir $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f = L \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f é **(Riemann) integrável em** $[a, b]$ **em sentido generalizado (s.g.)** *(ou impróprio)*. (**A integral converge**).
  - L é a **integral em sentido generalizado** *(ou a integral imprópria)* **de f em** $[a, b]$: (notação $\int_a^b f$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f **não é integrável em** $[a, b]$ **em sentido generalizado** *(ou impróprio)*. (**A integral imprópria não converge, ou ainda, diverge**).



Analogamente, seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\delta > 0$, a função $f|_{[a,b-\delta]}$ seja limitada e integrável em $[a, b - \delta]$.

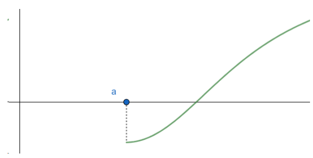


- se existir $\displaystyle\lim_{\delta\to 0^+} \int_a^{b-\delta} f = L \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f é (Riemann) integrável em $[a, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral converge).
  - L é a integral em sentido generalizado (ou impróprio) de f em $[a, b]$: (notação $\int_a^b f$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f não é integrável em $[a, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral imprópria não converge — ou, diverge).

Exemplo 1. Exercícios 23 a 24 em Slides de Exercícios.

Im.1.2 Intervalo não limitado

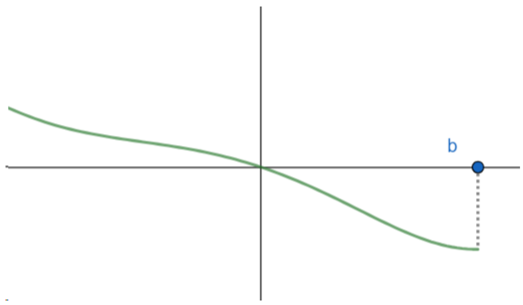
Seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que **para todo $M > a$, a função $f|_{[a,M]}$ seja limitada e integrável em $[a, M]$.**



- se existir $\displaystyle\lim_{\mathbf{M}\to+\infty} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{M}} \mathbf{f} = \mathbf{L} \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f é **(Riemann) integrável em $[a, \infty)$ em sentido generalizado** *(ou impróprio)*. (A integral converge).
  - L é a **integral em sentido generalizado** *(ou impróprio)* **de f em** $[a, \infty)$: (notação $\int_{\mathbf{a}}^{+\infty} \mathbf{f}$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f **não é integrável em** $[a, \infty)$ **em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral imprópria não converge — ou, diverge).*

Analogamente, seja $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ tal que para todo $M < b$, a função $f|_{[M,b]}$ seja limitada e integrável em $[M, b]$.

- se existir $\displaystyle\lim_{M\to-\infty}\int_M^b f = L \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f é (Riemann) integrável em $(-\infty, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral converge).
  - L é a integral em sentido generalizado (ou impróprio) de f em $(-\infty, b]$: (notação $\int_{-\infty}^b f$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f não é integrável em $(-\infty, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral imprópria não converge — ou, diverge).



Exemplo 2. Exercícios 25 a 26 e 27[1] em Slides de Exercícios.

---

[1] Caso geral

Im.1.3 Caso geral

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq D_f$

- se A **pode ser decomposto em um número finito de intervalos como os acima tais que f seja integrável em sentido generalizado em TODOS ELES**, então dizemos que f é **(Riemann) integrável em A em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral imprópria converge)*. Dizemos então que a **integral generalizada de f em A** é a soma das integrais em cada intervalo
- **caso contrário**, dizemos que **f não é integrável em A em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral imprópria não converge)*.

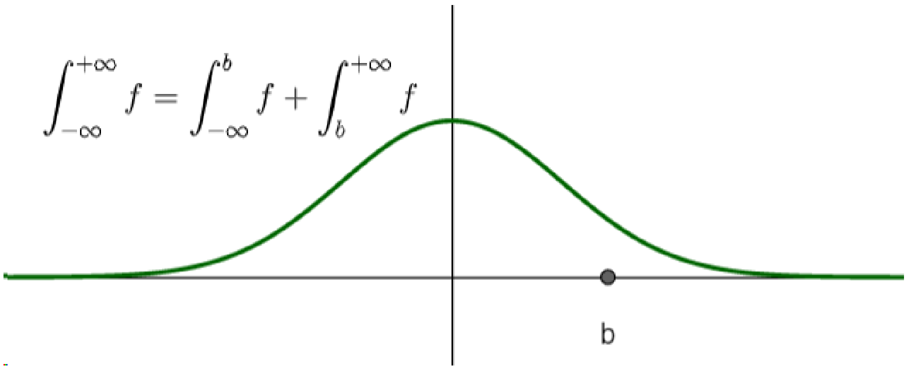


Figura 1: $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ é convergente quando ambas integrais $\int_{-\infty}^{b} f$ e $\int_{b}^{+\infty} f$ são convergentes

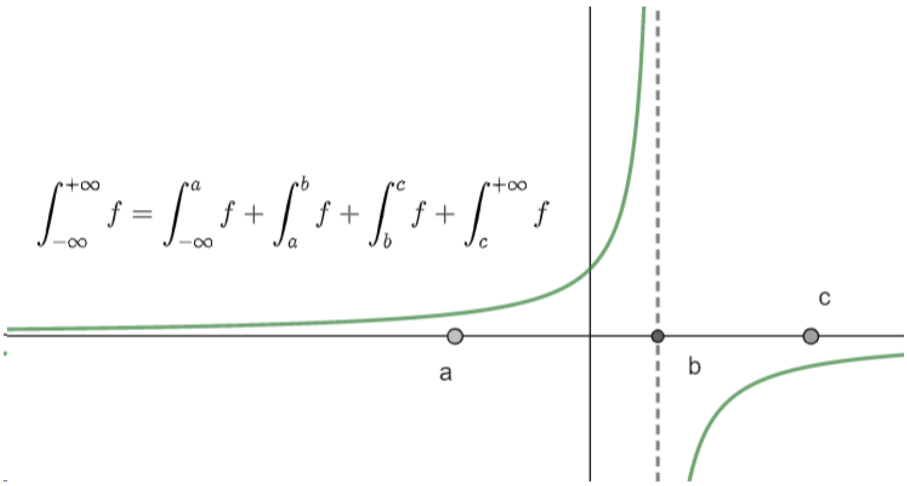


Figura 2: $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ é convergente quando TODAS as 4 integrais: $\int_{-\infty}^{a} f$ e $\int_{a}^{b} f$ e $\int_{b}^{c} f$ e $\int_{c}^{+\infty} f$ são convergentes

Im.2 Teoremas de comparação

Im.2.1 Teorema do Confronto

Teorema (Teorema do confronto para integrais impróprias). *Sejam $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ tais que para todo $\delta > 0$, as funções $f, g|_{[a+\delta,b]}$ sejam limitadas e integráveis em $[a + \delta, b]$.*

Se $0 \leq f \leq g$ **em** $(a, b]$ **então:**

- **se** g **é integrável em s.g. em** $[a, b]$ **então** f **também é integrável em s.g. em** $[a, b]$**, e vale**

$$0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

- **se** f **não é integrável em s.g. em** $[a, b]$ **então** g **também não o é.**

Um resultado análogo vale nos outros 3 casos.

Observe que se $f \geq 0$, então a função

$$G(\delta) = \int_{a+\delta}^b f$$

é não negativa monótona crescente e

$$\int_a^b f = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^b f = \begin{cases} L \geq 0 \\ ou \\ +\infty, \end{cases}$$

ou seja, o limite **não pode** não existir.

Im.2.2 Teorema do Confronto com Limite

Teorema. *Sejam* $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ *tais que para todo* $\delta > 0$*, as funções* $f, g|_{[a+\delta,b]}$ *sejam limitadas e integráveis em* $[a + \delta, b]$*. Sejam* $f, g \geq 0$ **em** $(a, b]$ *e*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Então,

- $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longrightarrow \int_a^b f$ **e** $\int_a^b g$ **têm o mesmo caráter**: *ambas convergem ou ambas divergem.*

. . . .

- $L = 0$ **e** $\begin{cases} \displaystyle\int_a^b g \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f \text{ converge} \\ \displaystyle\int_a^b f \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b g \text{ diverge} \end{cases}$

- $L = +\infty$ **e** $\begin{cases} \displaystyle\int_a^b f \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b g \text{ converge} \\ \displaystyle\int_a^b g \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b f \text{ diverge} \end{cases}$

. . . .

Um resultado análogo vale nos outros 3 casos, avaliando os limites para $x \to b^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, *respectivamente.*

Im.2.3 Função absolutamente integrável

Teorema. *Seja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\delta > 0$, a função $f|_{[a+\delta,b]}$ seja limitada e integrável em $[a + \delta, b]$.*

- *Se $|f|$ é integrável em s.g. em $[a, b]$* **então f também é integrável em s.g. em $[a, b]$, e vale**

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Um resultado análogo vale nos outros 3 casos.

Se $|f|$ é integrável em s.g. dizemos que f **é absolutamente integrável em s.g.** *(absolutamente convergente)*.

Exemplo 3. Exercícios 28 a 33 em Slides de Exercícios.

Im.2.4 Algumas integrais úteis para confrontar

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \overset{(a>0)}{=} \begin{cases} \lim\limits_{M\to\infty}\left[\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^M = \lim\limits_{M\to\infty}\dfrac{1}{1-p}\left[M^{1-p}-a^{1-p}\right] = +\infty & se\ p<1 \\ \lim\limits_{M\to\infty}\left[\ln(x)\right]_a^M = \lim\limits_{M\to\infty}\left[\ln(M)-\ln(a)\right] = +\infty & se\ p=1 \\ \lim\limits_{M\to\infty}\left[\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^M = \lim\limits_{M\to\infty}\dfrac{1}{1-p}\left[\dfrac{1}{M^{p-1}}-a^{1-p}\right] = \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & se\ p>1 \end{cases}$$

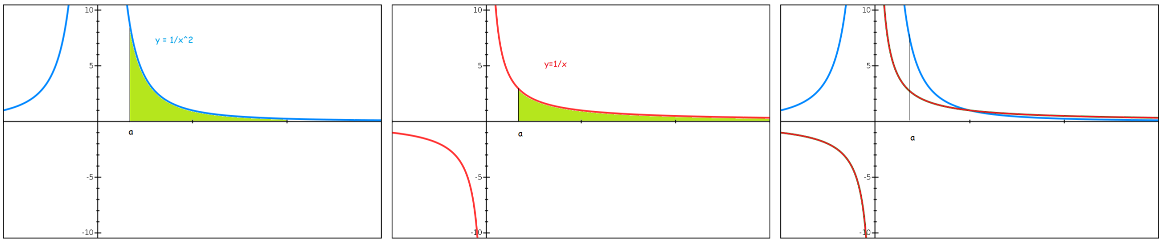


Figura 3: $p>0$

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx \overset{(a>0)}{=} \begin{cases} \lim\limits_{\delta\to 0^+}\left[\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\delta^a = \lim\limits_{\delta\to 0^+}\dfrac{1}{1-p}\left[a^{1-p}-\delta^{1-p}\right] = \dfrac{a^{1-p}}{1-p} & se\ p<1 \\ \lim\limits_{\delta\to 0^+}\left[\ln(x)\right]_\delta^a = \lim\limits_{\delta\to 0^+}\left(\ln(a)-\ln(\delta)\right) = +\infty & se\ p=1 \\ \lim\limits_{\delta\to 0^+}\left[\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\delta^a = \lim\limits_{\delta\to 0^+}\dfrac{1}{1-p}\left[a^{1-p}-\dfrac{1}{\delta^{p-1}}\right] = +\infty & se\ p>1 \end{cases}$$

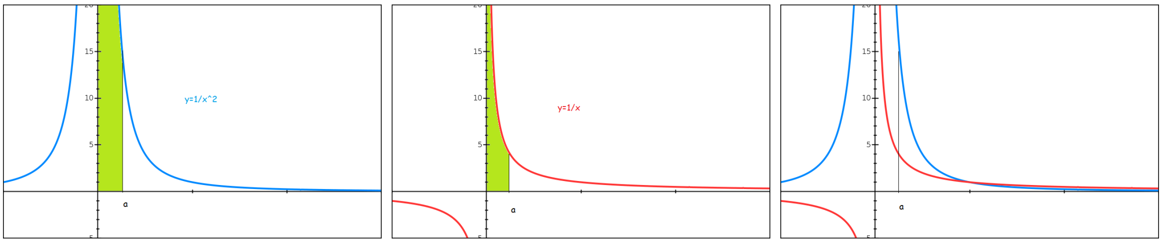


Figura 4: $p>0$

$$\int_a^{\infty} e^{kx}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{k}e^{kx}\right]_a^M = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{k}e^{kM} - \frac{1}{k}e^{ka}\right] = \begin{cases} \frac{1}{k}e^{ka} & se\ k<0 \\ \\ +\infty & se\ k<0 \end{cases} \qquad (a\in\mathbb{R})$$

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left[x\ln(x) - x\right]_\delta^1 = \lim_{\delta\to 0^+}\left[-1 - \delta\ln\delta + \delta\right] = -1$$

Resumindo:

$$\int_a^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} DIVERGENTE & se\ p\le 1 \\ CONVERGENTE & se\ p>1 \end{cases} \qquad (a>0)$$

$$\int_0^{a}\frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} CONVERGENTE & se\ p\in(0,1) \\ DIVERGENTE & se\ p\ge 1 \end{cases} \qquad (a>0)$$

$$\int_a^{\infty} e^{kx}\,dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} CONVERGENTE & se\ k<0 \\ DIVERGENTE & se\ k\ge 0 \end{cases} \qquad (a\in\mathbb{R})$$

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx \quad \text{é} \quad CONVERGENTE$$