Conteúdo

Ti.1 Técnicas de Integração

Ti.1.1 Linearidade

Sejam f, g funções contínuas. Então,

$$\int (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) \mathbf{dx} = \alpha \left(\int \mathbf{f} \right) + \beta \left(\int \mathbf{g} \right).$$

Na integral definida:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) \mathbf{dx} = \alpha \left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} \right) + \beta \left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{g} \right).$$

Ti.1.2 Substituição (mudança de variável)

Sejam f contínua e g contínua com derivada contínua. Então,

$$\int \mathbf{f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))}, \qquad \text{onde} \quad \mathbf{F(u)} = \int \mathbf{f(u)du}$$

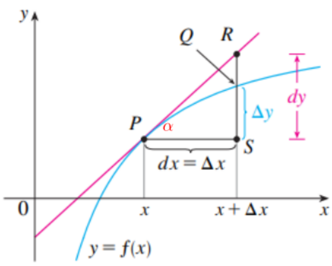
Ti.1.2.1 Interpretando como mudança de variável:

Definição Ti.1.1. Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I e $y = f(x)$, $x \in I$. A **diferencial da variável independente** x é uma variável independente:

$$dx = h, \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

e a **diferencial**[1] **da função** f é a função $df : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$df_x = df_x(dx) = df_x(h) = dy := f'(x)dx, \quad dx = h \in \mathbb{R}.$$



$$f'(x) = \tan\alpha = \frac{|RS|}{dx}$$

$$|RS| = f'(x)dx = dy$$

Fonte: Stewart, Cálculo, vol. 1: A inclinação da reta tangente PR é a derivada $f'(x)$. Assim, a distância direta de S to R é $f'(x)\,dx = dy$. Consequentemente, dy representa a distância que a reta tangente sobe ou desce (a variação na linearização), enquanto Δy representa a distância que a curva $y = f(x)$ sobe ou desce quando x varia por uma quantidade dx.

- *substituímos* $g(x) = u$ *e* $du = g'(x)dx$,
- *calculamos a primitiva de* f
- *substituímos de volta* $u = g(x)$

$$\int \mathbf{f(g(x))g'(x)dx} = \int \mathbf{f(u)du}\Big|_{\mathbf{u=g(x)}}.$$

[1] Veja também Seção D.7

Na integral definida:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \quad F(g(x))\Big|_{x=a}^{b}, \qquad \text{onde} \quad F(u) = \int f(u)du.$$

Interpretando como mudança de variável:

- *substituímos* $g(x) = u$ *e* $du = g'(x)dx$,
- *substituímos os extremos de integração, mantendo a ordem:* $\begin{cases} x = a \Longrightarrow & u = g(a) \\ x = b \Longrightarrow & u = g(b) \end{cases}$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \quad F(u)\Big|_{u=g(a)}^{g(b)}$$

Exemplo 1. Exercícios 8 a 10 em Slides de Exercícios.

Sites conhecidos que calculam primitivas:

Integral Calculator; Wolfram Alpha; Symbolab

Cuidado com os resultados!

$$\int_0^{2\sin(t)} x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{8\left(\cos^3(t)-1\right)}{3}$$

Passos

$$\int_0^{2\sin(t)} x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

Aplicar integração por substituição

$$= \int_4^{4-4\sin^2(t)} -\frac{\sqrt{u}}{2}du$$

Remover a constante: $\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\int_4^{4-4\sin^2(t)}\sqrt{u}\,du$$

Aplicar a regra da potência

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^{4-4\sin^2(t)}$$

Simplificar $4-4\sin^2(t)$: $4\cos^2(t)$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^{4\cos^2(t)}$$

Calcular os limites: $\frac{16}{3}\cos^3(t)-\frac{16}{3}$

!

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}\cos^3(t)-\frac{16}{3}\right)$$

Simplificar

$$= -\frac{8\left(\cos^3(t)-1\right)}{3}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sin(t)} r\sqrt{4-r^2}\,drdt = \frac{16\pi}{3} \quad (\text{Decimal: } 16.75516\ldots)$$

Passos

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sin(t)} r\sqrt{4-r^2}\,drdt$$

$$\int_0^{2\sin(t)} r\sqrt{4-r^2}\,dr = -\frac{8\left(\cos^3(t)-1\right)}{3}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{8\left(\cos^3(t)-1\right)}{3}\right)dt$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{8\left(\cos^3(t)-1\right)}{3}\right)dt = \frac{16\pi}{3}$$

$$= \frac{16\pi}{3}$$

Ti.1.3 Integração por partes

Sejam f, g funções contínuas e deriváveis com derivadas contínuas. Então,

$$\int \underbrace{f(t)}_{\mathbf{u}}\,\underbrace{g'(t)\,dt}_{\mathbf{dv}} = \underbrace{f(t)}_{\mathbf{u}}\,\underbrace{\mathbf{g(t)}}_{\mathbf{v}} - \int \underbrace{\mathbf{g(t)}}_{\mathbf{v}}\,\underbrace{\mathbf{f'(t)\,dt}}_{\mathbf{du}}.$$

Note:

$$\begin{cases} u = f(t), & \mathbf{du = f'(t)\,dt} \\ dv = g'(t)\,dt, & \mathbf{v = g(t)} \end{cases} \implies \boxed{\int \mathbf{u\,dv = uv} - \int \mathbf{v\,du}}$$

Filme: Vivir dos veces *(Live Twice, Love Once) personagem principal ensina que a regra se lê:*
*"**un día vi una v**aca - **v**estida **de u**niforme"*
Karina, Colombia *diz que o lado direito da igualdade se lê:*
*"**u**na **v**aca **no se v**iste **de u**niforme"*

Na integral definida:

$$\int_a^b \underbrace{f(t)}_{u}\,\underbrace{g'(t)\,dt}_{dv} = \Big[\underbrace{f(t)}_{u}\,\underbrace{g(t)}_{v}\Big]_a^b - \int_a^b \underbrace{g(t)}_{v}\,\underbrace{f'(t)\,dt}_{du}$$
$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(t)f'(t)\,dt\,.$$

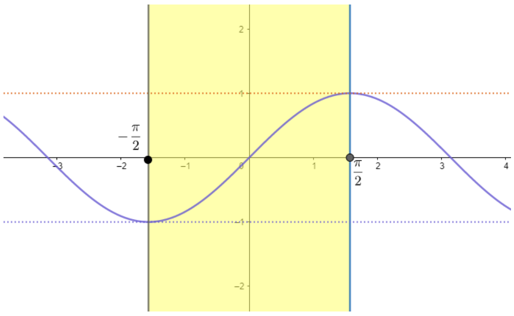
Exemplo 2. Exercícios 11 a 12 em Slides de Exercícios.

Ti.1.4 Substituição Trigonométrica/Hiperbólica

Usada quando aparece no integrando termo de uma das formas $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ $(a > 0)$, se não tiver substituição melhor!

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$: $\quad x = a \sin\theta, \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \quad dx = a\cos\theta d\theta$:

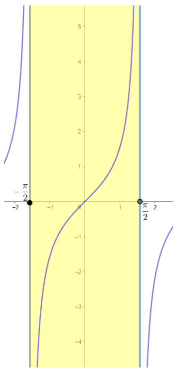
$$\boxed{|x| \leq a \Longleftrightarrow -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1}$$



2. $\sqrt{a^2 + x^2}$:

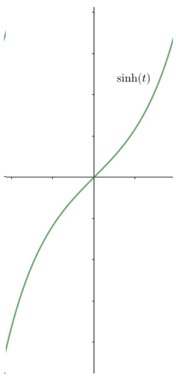
   - $x = a\tan\theta, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2), \quad dx = a\sec^2\theta d\theta$:

$$\boxed{x \in \mathbb{R}}$$



   - $x = a\sinh(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad dx = a\cosh(t)dt$

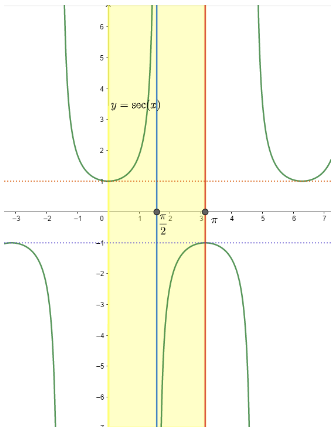
$$\boxed{x \in \mathbb{R}}$$



3. $\sqrt{x^2 - a^2}$:

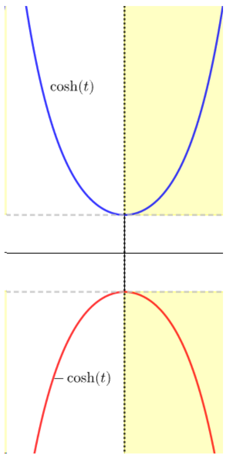
- $x = a\sec\theta$, com $\begin{cases} \theta \in [0, \frac{\pi}{2}), & se\ \frac{x}{a} \geq 1 \\ \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi], & se\ \frac{x}{a} \leq -1 \end{cases}$; $\quad dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$:

$$\boxed{|x| \geq a \iff \frac{x}{a} \geq 1 \text{ ou } \frac{x}{a} \leq -1}$$



- $x = \pm a\cosh(t), \quad t > 0, \quad dx = \pm\sinh(t)$

$$\boxed{|x| \geq a \iff \frac{x}{a} \geq 1 \text{ ou } \frac{x}{a} \leq -1}$$



Atenção: o cálculo de algumas integrais que pode ser bastante longo quando usado substituição trigonométrica pode ser bastante simples quando utilizado função hiperbólica. Fique atento!

Exemplo 3. Exercícios 13 a 17 em Slides de Exercícios.

Ti.1.5 Frações Parciais

Aplicável quando o integrando é uma **função racional** na forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad grau(P) < grau(Q),$$

onde o polinômio Q pode ser decomposto em fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis (distintos ou com repetições):

$$Q(x) = (a_1x+b_1)^{k_1}(a_2x+b_2)^{k_2}\dots(a_rx+b_r)^{k_r}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{s_1}\dots(a_tx^2+b_tx+c_t)^{s_t}$$

Neste caso, existem únicas constantes A_j, B_j de modo que se pode decompor a fração P/Q da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2^1}{(a_1x+b_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^1}{(a_1x+b_1)^{k_1}} + \\
&\vdots \\
&+ \frac{A_1^r}{(a_rx+b_r)} + \frac{A_2^r}{(a_rx+b_r)^2} + \quad \dots\dots \quad + \frac{A_{k_r}^r}{(a_rx+b_r)^{k_r}} + \\
&+ \frac{B_1^1x+C_1^1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \frac{B_2^1x+C_2^1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} + \dots + \frac{B_{s_1}^1x+C_{s_1}^1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{s_1}} + \\
&\vdots \\
&+ \frac{B_1^tx+C_1^t}{(a_2x^2+b_2x+c_2)} + \frac{B_2^tx+C_2^t}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2} + \quad \dots\dots \quad + \frac{B_{s_t}^tx+C_{s_t}^t}{(a_tx^2+b_tx+c_t)^{s_t}}.
\end{aligned}$$

Note: para o termo na decomposição de Q que aparece k_i (ou r_j) vezes, tem-se k_i (ou r_j) "frações parciais" relativas a esse termo.

Resumindo, relativo ao termo linear que aparecer r vezes $(\mathbf{ax}+\mathbf{b})^{\mathbf{r}}$ temos que escrever a soma das r frações:

$$\frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{ax}+\mathbf{b}} + \frac{\mathbf{A_2}}{(\mathbf{ax}+\mathbf{b})^2} + \dots + \frac{\mathbf{A_r}}{(\mathbf{ax}+\mathbf{b})^{\mathbf{r}}},$$

relativo ao termo quadrático **irredutível** que aparecer r vezes $(\mathbf{ax^2}+\mathbf{bx}+\mathbf{c})^{\mathbf{r}}$ temos que escrever a soma das r frações:

$$\frac{\mathbf{B_1x}+\mathbf{C_1}}{\mathbf{ax^2}+\mathbf{bx}+\mathbf{c}} + \frac{\mathbf{B_2x}+\mathbf{C_2}}{(\mathbf{ax^2}+\mathbf{bx}+\mathbf{c})^2} + \dots + \frac{\mathbf{B_rx}+\mathbf{C_r}}{(\mathbf{ax^2}+\mathbf{bx}+\mathbf{c})^{\mathbf{r}}}.$$

Note que:

1. $(a \neq 0)$ substituição e logarítmo:

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx \overset{u=ax+b}{=} \frac{A}{a}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

---

2. $(a \neq 0)$ substituição e potência:

$$\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx \overset{u=ax+b}{=} \frac{A}{a}\int u^{-n}\,du = \frac{A}{a}\frac{1}{(-n+1)(ax+b)^{n-1}}+k, \quad k \in \mathbb{R}, \ (n \geq 2).$$

---

3. $(a > 0)$

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{Bx+C}{(\sqrt{a}x+\tilde{a})^2+\tilde{c}}\,dx \overset{u=\sqrt{a}x+\tilde{a}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\tilde{B}u+\tilde{C}}{u^2+\tilde{c}}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\tilde{B}u}{u^2+\tilde{c}}\,du + \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\tilde{C}}{u^2+\tilde{c}}\,du\,,\end{aligned}$$

onde $\tilde{a} = b/2\sqrt{a}$, $\tilde{c} = (4ac-b^2)/4a > 0$, $\tilde{B} = B\sqrt{a}$, $\tilde{C} = C - B\tilde{a}a/\sqrt{a}$,

- substituição e logarítmo:

$$\int \frac{\tilde{B}u}{u^2+\tilde{c}}\,du \overset{v=u^2+\tilde{c}}{=} \frac{\tilde{B}}{2}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{\tilde{B}}{2}\ln|u^2+\tilde{c}| + k$$

- substituição e arco-tangente:

$$\int \frac{\tilde{C}}{u^2+\tilde{c}}\,du = \frac{\tilde{C}}{\tilde{c}}\int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{\tilde{c}}}\right)^2+1}\,du \overset{v=\frac{u}{\sqrt{\tilde{c}}}}{=} \frac{\tilde{C}}{\tilde{c}}\int \frac{1}{v^2+1}\,dv = \frac{\tilde{C}\sqrt{\tilde{c}}}{\tilde{c}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\tilde{c}}}\right)+k.$$

Logo

$$\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{B}{2}\ln|ax^2+bx+c|+\frac{\tilde{C}}{\tilde{c}\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x+b/2\sqrt{a}}{\sqrt{(4ac-b^2)/4a}}\right)+k$$

4. Um roteiro para integrais na forma

$$\int \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n}\, dx \qquad (n \geq 2)$$

pode ser encontrado na lista de exercício do Prof. E. Massa **aqui.**

Quanto mais integrais você resolver mais habilidade com as técnicas você terá!

Exemplo 4. Exercícios 18 a 21 em Slides de Exercícios.

Ti.2 Dicas de integração do Prof. Eugenio Massa:

Ti.2.1 Alguns produtos, trigonométricas e hiperbólicas

- **produto $x^n h(x)$ onde conheça primitivas de h:**
  integre por partes pondo $g(x) = x^n$, assim na integral que sobra terá $g'(x) = nx^{n-1}$... continuando até eliminar a potência.
  Funciona para $x^n e^x$, $x^n \cos(x), \ldots$.

  Exemplo:
  $\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx = x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x\, dx =$
  $= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k,\ k \in \mathbb{R}$

- **produto $x^n h(x)$ onde h tem derivada racional:**
  integre por partes pondo $g(x) = h(x)$, assim na integral que sobra terá apenas uma racional.
  Funciona para $x^n \ln(x)$, $x^n \arctan(x), \ldots$.

  Exemplo:
  $\int x^2 \ln(x)\, dx = x^3 \ln(x)/3 - \int (x^3/3x)\, dx = x^3 \ln(x)/3 - x^3/9 + k,\ k \in \mathbb{R}$

- **quadrado de trigonométrica ou hiperbólica:**
  integre por partes e depois use identidades...

  Exemplo:
  $\int Ch^2(x)\,dx = Sh(x)Ch(x) - \int Sh^2(x)\,dx =$
  $= Sh(x)Ch(x) - \int (Ch^2(x) - 1)\,dx$
  logo $2\int Ch^2(x)\,dx = Sh(x)Ch(x) + \int 1\,dx = Sh(x)Ch(x) + x + k,\ \ k \in \mathbb{R}$

- **trigonométrica com exponencial:**
  integre por partes duas vezes e leve do outro lado...
  Funciona também para $Sh(x)\cos(x)$, ...

  Exemplo:
  $\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx =$
  $= e^x \sin(x) - \left[e^x(-\cos(x)) - \int e^x(-\cos(x))\,dx\right]$
  logo $2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}$

- **substituição trigonométrica ou hiperbólica:** quando aparece o termo $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$, se não tiver substituição melhor:

  - no caso $\sqrt{a^2 - x^2}$, substitua $x = a\sin(t),\ t \in (-\pi/2, \pi/2)$;
  - no caso $\sqrt{a^2 + x^2}$, substitua $x = a\,Sh(t),\ t \in \mathbb{R}$;
  - no caso $\sqrt{x^2 - a^2}$, substitua $x = \pm a\,Ch(t),\ t > 0$.

  isso leva a eliminar a raiz usando relações trigonométricas-hiperbólicas.

  Exemplo:
  $\int \sqrt{4 + x^2}\,dx = (x = 2Sh(t),\ dx = 2Ch(t)\,dt)\ \int \sqrt{4(1 + Sh^2(t)}2\,Ch(t)\,dt$
  $= \int \sqrt{4Ch^2(t)}2\,Ch(t)\,dt = \int 4Ch^2(t)\,dt = ...$

  Alernativa:
  Também pode funcionar integrar por partes:
  $\int \sqrt{4 + x^2}\,dx = x\sqrt{4 + x^2} - \int x\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = x\sqrt{4 + x^2} - \int \frac{4+x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx + \int \frac{4}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$:
  agora a primeira integral é igual ao lado esquerdo, a segunda é imediata $(SetSh)$

- **Caso** $\int x^n \left(\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}\right)^{\pm 1}$
  - Se n é par use a substituição trigonométrica ou hiperbólica acima.
  - Se n é ímpar, também as substituições $y = \pm a^2 \pm x^2$ ou $z = \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ podem funcionar.

  Exemplo:

  $\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx = (y = 9 + x^2,\ dy = 2x\,dx)\ \int (y-9)\sqrt{y}\,dy/2 =$
  $= \int (y^{3/2} - 9\sqrt{y})dy/2 = \ldots$
  $\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx = (z = \sqrt{9+x^2},\ 2z\,dz = 2x\,dx)$
  $\int (z^2-9)z\,zdz = \int (z^4 - 9z^2)dz = \ldots$

Ti.2.2 Casos que podem ser reduzidos a funções racionais

Seja R[a,b,..] uma função racional nas variáveis $a, b, ..$

- $\int \mathbf{R}[\sin(\mathbf{x})]\ \cos(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} = \int R(t)\,dt$ *pondo* $t = \sin(x)$.
  O mesmo funciona para $R[\cos(x)]\ \sin(x)\,dx$ **e análogos hiperbólicos**.
  também os casos $R[\sin(x), \cos(x)^2]\ \cos(x)$ **e análogos** encaixam pois pode ver como $R[\sin(x), 1-\sin(x)^2]\ \cos(x)$

  Exemplo:

  $$\int \frac{\sin(x)^2 - 3\sin(x)}{1-\sin(x)+\cos^2(x)}\cos(x)\,dx = \int \frac{t^2-3t}{1-t+1-t^2}\,dt$$

- $\int R[\sin(x), \cos(x)]\,dx$ sempre pode ser tratada da maneira seguinte (mas deixar como última tentativa, pois as contas sao feias!)
  ponha $t = \tan(x/2)$, assim $\sin(x) = 2t/(1+t^2)$, $\cos(x) = (1-t^2)/(1+t^2)$ e $dx = 2dt/(1+t^2)$.

  Para o caso $\int R[Sh(x), Ch(x)]\,dx$ *ponha* $t = Th(x/2)$, assim $Sh(x) = 2t/(1-t^2)$, $Ch(x) = (1+t^2)/(1-t^2)$ e $dx = 2dt/(1-t^2)$.

  Exemplo:

  $$\int \frac{\sin(x)^2 - 3\cos(x)}{1-\sin(x)+\cos(x)}\,dx = \int \frac{4t^2/(1+t^2) - 3(1-t^2)}{1-2t+(1-t^2)}\,\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

- $\int \sin^n(x)\cos^k(x)\,dx, \quad (n,k \in \mathbb{Z})$:
  - *se n ou k é ímpar, substitua a outra:*
    Exemplo:
    $\int \sin^8(x)\cos^7(x)\,dx = (t = \sin(x),\ dt = \cos(x)\,dx)$
    $\int t^8(1-t^2)^3\,dt = \ldots$
  - *se ambas são par, use as fórmulas de duplicação para baixar o grau*:
    Exemplo:
    $\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx = \int (1-\cos(2x))/2 \cdot (1+\cos(2x))/2\,dx =$
    $= \int (1-\cos^2(2x))/4\,dx = \ldots$
- $\int \sin(nx)\cos(kx)\,dx$ **ou** $\int \sin(nx)\sin(kx)\,dx$ **ou** $\int \cos(nx)\cos(kx)\,dx$:
  use fórmulas trigonométricas
  Exemplo:
  $\int \sin(nx)\cos(kx)\,dx = \int (\sin(nx-kx)+\sin(nx+kx))/2\,dx =$
  $= \ldots$