PRIMITIVAS E DERIVADAS DE FUNÇÕES ELEMENTARES:

Lembre-se: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. A função F é uma *primitiva* de f em I, quando:

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I.$$

Funções Elementares: exponencial, potências, logaritmo

Primitivas	Derivadas
$\int e^x dx = e^x + c, \quad x \in \mathbb{R}$	$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c;\ (n \in \mathbb{N}), \quad x \in \mathbb{R}$	$(x^n)' = nx^{n-1},\ (n \in \mathbb{N}), \quad x \in \mathbb{R}$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c;\ (n \in \mathbb{Z}_-^* \setminus \{-1\}), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(x^n)' = nx^{n-1},\ (n \in \mathbb{Z}_-^* \setminus \{-1\}), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int \sqrt[p]{x} dx = \dfrac{x^{1/p+1}}{1/p+1} + c;\ (p \text{ par}) \qquad x \in [0, \infty)$	$(\sqrt[p]{x})' = \dfrac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1},\ (p \text{ par}) \qquad x \in (0, \infty)$
$\int \sqrt[p]{x} dx = \dfrac{x^{1/p+1}}{1/p+1} + c;\ (p \text{ ímpar}) \qquad x \in \mathbb{R}$	$(\sqrt[p]{x})' = \dfrac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1},\ (p \text{ ímpar}) \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c;\ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \qquad x \in (0, \infty)$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad x \in (0, \infty)$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln(x) + c, & x \in (0, \infty) \\ \ln(-x) + c, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$	$(\ln \lvert x \rvert)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Funções elementares: trigonométricas e trigonométricas inversas

Primitivas	Derivadas
$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$
$\int \sec x \operatorname{tg} x dx \overset{*}{=} \sec x + c;$ (* em apropriados intervalos)	$(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$
$\int \sec^2 x dx \overset{*}{=} \operatorname{tg} x + c;$ (* em apropriados intervalos)	$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c, \quad x \in \mathbb{R};$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, \quad x \in (-1,1)$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c \quad x \in (-1,1)$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + c, \quad x > 1$	$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1;$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Funções elementares: hiperbólicas e hiperbólicas inversas

Primitivas	Derivadas
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = senh^{-1}x + c, \quad x \in \mathbb{R}$ $senh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$	$(senh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = cosh^{-1}x + c, \quad x > 1$ $cosh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$	$(cosh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = -sech^{-1}x + c, \quad 0 < x < 1$ $sech^{-1}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$	$(sech^{-1}x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1$
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = tgh^{-1}x + c \qquad \lvert x\rvert < 1$ $tgh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \lvert x\rvert < 1$	$(tgh^{-1}x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = cotgh^{-1}x + c, \qquad \lvert x\rvert > 1$ $cotgh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \qquad \lvert x\rvert > 1$	$(cotgh^{-1}x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert > 1$

NOTE:

$$\arcsin x + c_1 \overset{x\in(-1,1)}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \overset{x\in(-1,1)}{=} -\arccos x + c_2$$

- a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ é contínua em $(-1,1)$;

- portanto f é integrável em qualquer subintervalo fechado de $[-1,1]$.

Além disso, $\arcsin x$ e $-\arccos x$ são primitivas de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ em $(-1,1)$ e vale:

$$\arcsin x = -\arccos(x) + c$$

pois:

$$\left.\begin{array}{r} y = \arcsin x \iff x = \sin y \\ z = -\arccos x \iff x = \cos(-z) \end{array}\right\} \Longrightarrow \sin y = \cos z \Longrightarrow y = z + \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

ASSIM, por exemplo:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(1/2) - \arcsin(-1/2) = -\arccos(1/2) - (-\arccos(-1/2)).$$

$$tgh^{-1}(x) + c_1 \overset{|x|<1}{=} \int \frac{1}{1-x^2}dx \overset{|x|>1}{=} cotgh^{-1}(x) + c_2,$$

- a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ e não é limitada em $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$;

- a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ é contínua em qualquer subintervalo fechado de $(-1,1)$ ou de $(-\infty,-1)$ ou de $(1,\infty)$.

portanto:

- a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ é integrável em qualquer subintervalo fechado de $(-1,1)$ ou de $(-\infty,-1)$ ou de $(1,\infty)$.

- a função $tgh^{-1}(x)$ é uma primitiva de f em $(-1,1)$, enquanto a função $cotgh^{-1}(x)$ é uma primitiva de f em $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

MAS, neste caso, não faz sentido compararmos as funções tgh^{-1} com $cotgh^{-1}$ pois elas possuem domínios distintos!

ASSIM, por exemplo:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}dx = tgh^{-1}(1/2) - tgh^{-1}(-1/2); \quad \int_2^3 \frac{1}{1-x^2}dx = cotgh^{-1}(3) - cotgh^{-1}(2)$$