Aplicações dos Teoremas de Gauss e Stokes

1 Interpretações para o rotacional e o divergente

Usando os teorema de Stokes e de Gauss em $\mathbb{R}^3$ podemos obter a seguinte interpretação do significado do rotacional e do divergente de um campo tridimensional F:

$$[rotF(\mathbf{p})] \cdot \widehat{\mathbf{v}} = \lim_{r \to 0} \left(\frac{\displaystyle\oint_{\partial^+ D_r^{\widehat{\mathbf{v}}}(\mathbf{p})} F \cdot d\mathbf{s}}{|D_r^{\widehat{\mathbf{v}}}(\mathbf{p})|_2} \right)$$

onde $D_r^{\widehat{\mathbf{v}}}(\mathbf{p})$ é o disco de raio r, centro $\mathbf{p}$ e normal $\widehat{\mathbf{v}}$.

"A circulação de F sobre a fronteira do disco é aproximadamente o produto da área do disco pela componente do *rot* F na direção $\widehat{\mathbf{v}}$. Portanto a componente de *rot* F na direção $\widehat{\mathbf{v}}$ pode ser interpretada como circulação por unidade de área no ponto $\mathbf{p}$."

$$divF(\mathbf{p}) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{\displaystyle\int_{\partial B_r(\mathbf{p})} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}]\, d\sigma}{|B_r(\mathbf{p})|_3} \right)$$

onde $B_r(\mathbf{p})$ é a bola de raio r e centro $\mathbf{p}$.

"O fluxo de F através da fronteira da bola é aproximadamente o produto do volume da bola pelo *div* F. Portanto, o *div* F em $\mathbf{p}$ pode ser interpretado como um fluxo por unidade de volume em $\mathbf{p}$ de F através da fronteira da bola.

2 Eq. de Maxwell

"As equações de Maxwell são um grupo de equações diferenciais parciais que, juntamente com a lei da força de Lorentz, compõem a base do eletromagnetismo clássico no qual está embebida toda a óptica clássica. O desenvolvimento das equações de Maxwell, e o entendimento do eletromagnetismo, contribuíram significativamente para toda uma revolução tecnológica iniciada no final do século XIX e continuada durante as décadas seguintes."(Fonte: Wikpédia: Eq. de Maxwell)

2.1 Lei de Gauss (para o campo elétrico)

$$divE = \rho/\varepsilon_0$$

(ρ densidade de carga (escalar)). Integrando:

$$\iint_{\partial V} E \cdot d\vec{S} = Q_V/\varepsilon_0$$

"O fluxo elétrico através de uma superfície fechada é igual[1] à carga total na região interior".

No vácuo, o fluxo elétrico através de uma superfície

$$\iint_{\sigma} E \cdot d\vec{S}$$

depende apenas da $\partial^+\sigma$.

2.2 Lei de Gauss para o campo magnético

$$divB = 0$$

Integrando

$$\iint_{\partial V} B \cdot d\vec{S} = 0$$

"O fluxo magnético através de uma superfície fechada é sempre igual a zero".

O fluxo magnético através de uma superfície

$$\iint_{\sigma} B \cdot d\vec{S}$$

depende apenas da $\partial^+\sigma$.

O campo B admite um potencial-vetor (em conjuntos fortemente conexos).

2.3 Lei de Ampere (caso estático - sem correção de Maxwell)

$$rotB = \mu_0 \vec{j}$$

($\vec{j}$ densidade de corrente (Campo Vetorial)). Integrando

$$\int_{\partial^+\sigma} B \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_\sigma$$

"A circuitação de B ao longo da curva fechada $\partial^+\sigma$ é igual[1] ao fluxo de corrente por σ".

[1] a igualdade é sempre através de alguma constante de proporcionalidade.

2.4 Lei de Ampere (caso geral - com correção de Maxwell)

$$rot B = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 E_t$$

$$\int_{\partial^+\sigma} B \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_\sigma \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0\varepsilon_0\, \partial_t \iint_\sigma E \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_\sigma + \mu_0\varepsilon_0\, \partial_t \Phi_\sigma(E)$$

"A circuitação de B ao longo da curva fechada $\partial^+\sigma$ é igual[1] ao fluxo de corrente por σ mais a derivada temporal do fluxo de E por σ".

2.5 Lei de Faraday (indução eletromagnética)

$$rot E = -B_t$$

$$\int_{\partial^+\sigma} E \cdot d\vec{s} = -\partial_t \iint_\sigma B \cdot d\vec{S} = -\partial_t \Phi_\sigma(B)$$

A circuitação de E ao longo da curva fechada $\partial^+\sigma$ é igual[1] ao oposto da derivada do fluxo de B por σ

"A força eletromotriz induzida em qualquer circuito fechado é igual ao oposto da variação do fluxo magnético com o tempo na área delimitada pelo circuito"