$1.^A$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE SMA-301 - CÁLCULO I

Professora: Sueli M. Tanaka Aki - Turmas 2 e 9 - 2015

1) Calcule, se existir, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to -9} 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} |5x-2|$

c) $\lim\limits_{x\to 1} x^3 - x^2 + 4x + 11$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-3x+4}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$

g) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}(x/2)}{\pi - x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen}(x)}{x+\operatorname{sen}(x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x + \dfrac{x}{|x|})$

j) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cossec}(x)$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{2x}$

l) $\lim\limits_{x\to n^+} x - [x], [x] = \textit{maior inteiro} \leq x$

m) $\lim\limits_{x\to n^-} x - [x]$

n) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos(\dfrac{1}{x})$

o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{1-\operatorname{tg}(x)}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5+2x^3}{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen}(x)}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}-\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}{x}$

r) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{3x-8}-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

s) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$

t) $\lim\limits_{x\to 1} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$

u) $\lim\limits_{y\to x} \operatorname{sen}(xy) + \cos(y^2 - x)$

2) Calcule, caso exista. Se não existir, justifique.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2-(x-2)^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ onde $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ onde f é a função do item (b)

3) Considere $f(x) = (-1)^n$ para $\dfrac{1}{2^{n+1}} < x \leq \dfrac{1}{2^n}$ com $n \in N$.

a) Esboce o gráfico de f.
b) Existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$?

4) Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, onde f é dada por

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2-1}{x-1}, \quad \forall\, x \neq 1.$$

Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

6) Sejam f , $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$[g(x)]^4 + [f(x)]^4 = 4\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Calcule e justifique a) $\lim_{x\to 0} x^5 g(x)$ e b) $\lim_{x\to 3} f(x)\sqrt{x^3-27}$.

7) Em cada item abaixo, determine o maior conjunto onde a função f em questão é contínua.

$$a)\ f(x)=\frac{3x-5}{2x^2-x-3} \qquad b)\ f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \qquad c)\ f(x)=\sqrt{2x-3}+x^2$$

$$d)\ f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad e)\ f(x)=\frac{x}{x^2+1} \qquad f)\ f(x)=\frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$$

8) Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique sua resposta.

(a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-1} & \text{se } x\neq 2 \\ L & \text{se } x=2 \end{cases}$ em $p=2$. (b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} & \text{se } x\neq 3 \\ L & \text{se } x=3 \end{cases}$ em $p=3$.

(c) $f(x)=\begin{cases} x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ L & \text{se } x=0 \end{cases}$ em $p=0$.

9) Determine as constantes A, B de modo que a função $f(x)=\begin{cases} 3x & ,\text{ se } x\leq 2 \\ Ax+B & ,\text{ se } 2<x<5 \\ -6x & ,\text{ se } x\geq 5 \end{cases}$ seja contínua em R.

10) Sejam $f,\ g : R\to R$ funções contínuas em R tais que $f(3)=g(3)$. Pergunta-se: a função $h(x)=\begin{cases} f(x) & ,\text{ se } x\leq 3 \\ g(x) & ,\text{ se } x>3 \end{cases}$ é contínua em R? Justifique sua resposta.

11) Calcule:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{x}{\text{sen}(x)-2x}\right) \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\text{sen}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-3x)}{x}\right)$$

12) a) Suponha que $|f(x)-f(1)|\leq (x-1)^2$ para todo $x\in R$. Mostre que f é contínua no ponto $x_0=1$.

b) Considere $f,\ g : R\to R$ funções que satisfazem $|f(x)-f(x_0)|\leq k|g(x)-g(x_0)|$, para todo $x\in R$, onde $k>0$ está fixo. Assumindo que g é contínua em x_0, mostre que f também será contínua em x_0.

13) Mostre que a equação

$$x^3-\frac{1}{1+x^4}=0$$

admite pelo menos uma raiz real.

14) Seja $f : [0,\ 1]\to[0,\ 1]$ uma função contínua. Mostre que existe $x_0\in[0,\ 1]$ tal que $f(x_0)=x_0$.

15) a) Mostre que existe um número real x_0 tal que $x_0^5-4x_0+1=7,21$.
b) Considere $f,\ g : [a,b]\to R$ funções contínuas tais que $f(a)<g(a)$ e $g(b)<f(b)$. Mostre que existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=g(c)$.

16) Um corredor parte do repouso e corre numa pista circular em um único sentido. Ele para quando chega ao ponto de partida. Mostre que, pelo menos, uma vez durante esta volta, ele deve ter desenvolvido a mesma velocidade em pontos diametralmente opostos.

17) Um alpinista começa a escalar uma montanha às 8:00 horas do sábado e chega ao topo às 16:00 horas do mesmo dia. Acampa no topo e desce às 8:00 horas do domingo, chegando no ponto original de saída às 16:00 horas. Mostre que em algum horário no domingo ele estava à mesma altura em que esteve no mesmo horário no sábado.